

BAB III

LANDASAN TEORI

A. Baja

1. Sejarah Penggunaan Material Baja

Sekitar tahun 4000 SM, besi (komponen utama penyusun baja) digunakan untuk membuat peralatan – peralatan sederhana. Material ini dibuat dalam bentuk besi tempa, yang diperoleh dengan memanaskan bijih – bijih besi dengan menggunakan arang. Pada awal abad ke-19, besi tuang dan besi tempa sudah mulai banyak digunakan untuk pembuatan struktur jembatan. Jembatan pertama yang terbuat dari besi tuang yaitu Jembatan Lengkung Coalbrookdale di Inggris sepanjang 30 m.

Baja muncul sebagai material baru pada abad ke-19. Material baja merupakan logam paduan antara besi dan karbon dengan kadar karbon yang lebih sedikit daripada besi tuang, serta mulai digunakan dalam konstruksi – konstruksi berat. Sir Henry Bessemer merupakan orang yang pertama kali membuat baja dalam volume besar dan mendapatkan hak paten atas temuannya dari pemerintah Inggris pada tahun 1855. Beliau mempelajari bahwa dengan menghembuskan aliran udara di atas besi cair panas akan membakar kotoran – kotoran yang ada di dalam besi tersebut, namun secara bersamaan proses ini juga menghilangkan komponen – komponen penting seperti karbon dan mangan. Selanjutnya, komponen – komponen penting ini dapat digantikan dengan suatu logam paduan antara besi, karbon dan mangan, di samping itu juga mulai ditambahkan batu kapur yang dapat mengikat senyawa fosfor dan sulfur. Dengan ditemukannya proses Bessemer, maka di tahun 1870 baja karbon mulai dapat diproduksi dalam skala besar dan secara perlahan material baja mulai menggaantikan besi tuang sebagai elemen konstruksi.

Di Amerika Serikat jembatan kereta api pertama yang dibuat dari baja adalah Jembatan Eads pada tahun 1874 dengan bentang sepanjang 520 ft, sedangkan untuk struktur portal rangka baja pertama adalah *Home Insurance Company Building* di Chicago yang dibangun oleh William Le Baron Jenney, dengan

menggunakan kolom dari besi tempa dan balok–balok di lantai atasnya terbuat dari balok baja struktural.

2. Pengertian Baja

Baja adalah logam paduan dengan besi sebagai unsur dasar dan karbon sebagai unsur paduan utamanya. Kandungan karbon dalam baja berkisar antara 0,21% hingga 2,1% berat sesuai *grade*-nya. Fungsi karbon dalam baja adalah sebagai unsur penguat dengan mencegah dislokasi bergeser pada kisi kristal (*crystal lattice*) atom besi. Unsur paduan lain yang biasa ditambahkan selain karbon adalah mangan (*manganese*), krom (*chromium*), vanadium, dan nikel. Dengan memvariasikan kandungan karbon dan unsur paduan lainnya, berbagai jenis kualitas baja bisa didapatkan. Penambahan kandungan karbon pada baja dapat meningkatkan kekerasan (*hardness*) dan kekuatan tariknya (*tensile strength*), namun di sisi lain membuatnya menjadi getas (*brittle*) serta menurunkan keuletannya (*ductility*).

Baja merupakan suatu bahan konstruksi yang lazim digunakan dalam struktur bangunan sipil. Karena kekuatan yang tinggi dan ketahanan terhadap gaya luar yang besar maka baja ini juga telah menjadi bahan pilihan untuk konstruksi menara air rangka baja. Struktur baja bisa dibagi atas tiga kategori umum :

- a. Struktur rangka (*framed structure*), yang elemennya bisa terdiri dari batang tarik, kolom, balok dan batang yang mengalami gabungan lenturan dan beban aksial.
- b. Struktur gantung (*suspension*), yang sistem pendukung utamanya mengalami tarikan aksial yang dominan.
- c. Struktur selaput (*shell*), yang tegangan aksialnya dominan.

3. Jenis Baja

Baja yang akan digunakan dalam struktur dapat diklasifikasikan menjadi baja karbon (*Carbon Steel*), baja paduan rendah mutu tinggi (*High Strength–Low Alloy Steel, HSLA*) dan baja paduan (*Alloy Steel*). Sifat – sifat mekanik dari baja tersebut seperti tegangan leleh dan tegangan putusnya diatur dalam ASTM A6/A6M.

a. Baja karbon (*Carbon Steel*)

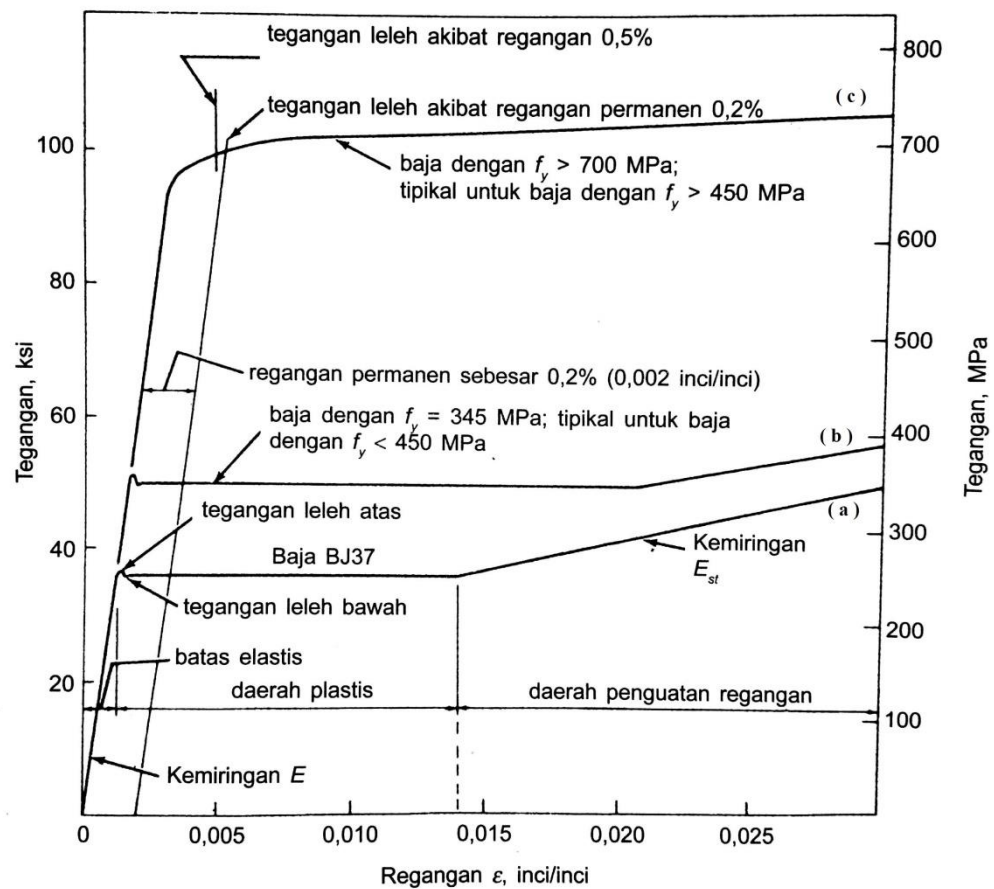
Baja karbon dibagi menjadi 3 kategori tergantung dari presentase kandungan karbonnya, yaitu baja karbon rendah ($C = 0,03 - 0,035\%$), baja karbon medium ($C = 0,35 - 0,50\%$), dan baja karbon tinggi ($C = 0,55 - 1,70\%$). Baja yang sering digunakan dalam struktur adalah baja karbon medium, misalnya BJ 37. Kandungan karbon baja medium bervariasi dari $0,25 - 0,29\%$ tergantung ketebalan. Selain karbon, unsur lain yang juga terdapat dalam baja karbon adalah mangan ($0,25 - 1,50\%$), Silikon ($0,25 - 0,30\%$), fosfor (maksimal $0,40\%$) dan sulfur ($0,50\%$). Baja karbon menunjukkan peralihan leleh yang jelas, seperti nampak dalam Gambar 3.1, kurva a. Naiknya presentase karbon meningkatkan tegangan leleh namun menurunkan daktilitas, salah satu dampaknya adalah membuat pekerjaan las menjadi lebih sulit. Baja karbon umumnya memiliki tegangan leleh (f_y) antara $210 - 250$ MPa.

b. Baja paduan rendah mutu tinggi (*High Strength-Low Alloy Steel, HSLA*)

Baja yang termasuk dalam kategori baja paduan rendah mutu tinggi mempunyai tegangan leleh berkisar antara $290 - 550$ Mpa dengan tegangan putus (f_u) antara $415 - 700$ Mpa. Titik peralihan leleh dari baja ini nampak dengan jelas (Gambar 3.1, kurva b). Penambahan bahan-bahan paduan seperti chromium, columbium, angan, molybden, nikel, fosfor, vanadium atau zirkonium dapat memperbaiki sifat-sifat mekaniknya. Jika baja karbon mendapatkan kekuatannya seiring dengan penambahan presentase karbon, maka bahan-bahan aduan ini mampu memperbaiki sifat mekanik baja dengan membentuk mikrostruktur dalam bahan aja yang lebih halus.

c. Baja paduan (*Alloy Steel*)

Baja paduan rendah dapat ditempa dan dipanaskan untuk memperoleh tegangan antara $550 - 700$ Mpa. Titik peralihan leleh tidak tampak dengan jelas (Gambar 3.1, kurva c). Tegangan leleh dari baja paduan biasanya ditemukan sebagai tegangan yang terjadi saat timbul regangan permanen sebesar $0,2\%$ atau dapat ditentukan pula sebagai tegangan pada saat regangan mencapai $0,5\%$.



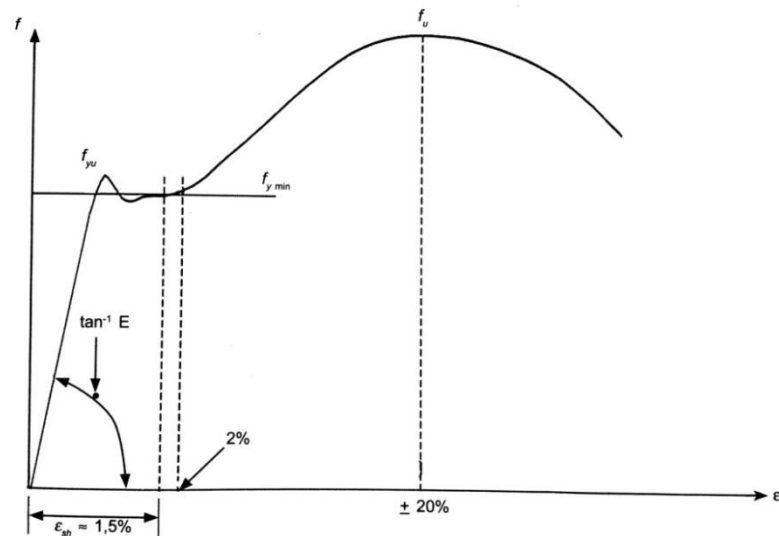
Gambar 3.1 Hubungan tegangan – regangan tipikal

(Sumber: Setiawan, A. Perencanaan Struktur Baja dengan Metode LRFD, 2013)

4. Sifat – Sifat Mekanik Baja

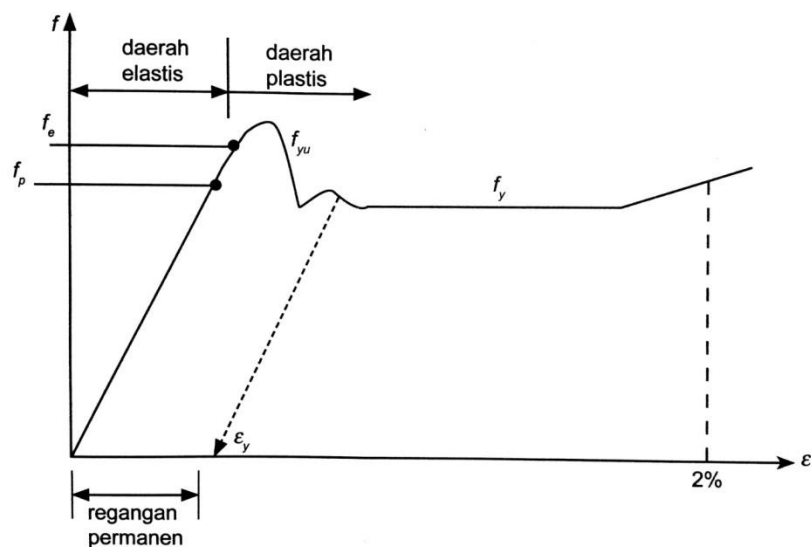
Seorang ahli struktur harus memahami sifat – sifat mekanik dari baja agar dapat memahami perilaku suatu struktur baja. Model pengujian yang paling tepat untuk mendapatkan sifat – sifat mekanik material baja adalah dengan melakukan uji tarik terhadap suatu benda uji baja. Uji tekan tidak dapat memberikan data yang akurat terhadap sifat – sifat mekanik material baja, karena disebabkan beberapa hal antara lain adanya potensi tekuk pada benda uji yang mengakibatkan ketidakstabilan dari benda uji tersebut, selain itu perhitungan tegangan yang terjadi di dalam benda uji lebih mudah dilakukan untuk uji tarik daripada uji tekan. Gambar 3.2 dan 3.3 menunjukkan suatu hasil uji tarik material baja yang dilakukan pada suhu kamar serta dengan memberikan laju regangan yang normal. Tegangan nominal (f) yang terjadi dalam benda uji diplot pada sumbu vertikal,

sedangkan regangan (ε) yang merupakan perbandingan antara pertambahan panjang dengan panjang mula-mula ($\Delta L/L$) diplot pada sumbu horizontal. Gambar 3.2 merupakan hasil uji tarik dari suatu benda uji baja yang dilakukan hingga benda uji mengalami keruntuhan, sedangkan Gambar 3.3 menunjukkan gambaran yang lebih detail dari perilaku benda uji hingga mencapai regangan sebesar $\pm 2\%$.



Gambar 3.2 Kurva Hubungan Tegangan (f) vs Regangan (ε)

(Sumber: Setiawan, A. Perencanaan Struktur Baja dengan Metode LRFD, 2013)



Gambar 3.3 Kurva Hubungan Tegangan (f) – Regangan (ε) yang Diperbesar

(Sumber: Setiawan, A. Perencanaan Struktur Baja dengan Metode LRFD, 2013)

Titik – titik penting dalam kurva tegangan – regangan antara lain adalah :

- f_p : batas proporsional
- f_e : batas elastis
- f_{yu}, f_y : tegangan leleh atas dan bawah
- f_u : tegangan putus (*Ultimate Stress*)
- ε_{sh} : regangan saat mulai terjadi efek *strain-hardening* (penguatan regangan)
- ε_u : regangan saat tercapainya tegangan putus

Titik – titik penting ini membagi kurva tegangan – regangan menjadi beberapa daerah sebagai berikut :

- a. Daerah linear antara 0 dan f_p , dalam daerah ini berlaku Hukum Hooke, kemiringan dari bagian kurva yang lurus ini disebut sebagai Modulus Elastisitas atau Modulus *Young*, $E (= f/\varepsilon)$
- b. Daerah elastis antara 0 dan f_e , pada daerah ini jika beban dihilangkan maka benda uji akan kembali ke bentuk semula atau dikatakan bahwa benda uji tersebut masih bersifat elastis.
- c. Daerah plastis yang dibatasi oleh regangan antara 2% hingga 1,2 – 1,5%, pada bagaian ini regangan mengalami kenaikan akibat tegangan konstan sebesar f_y . Daerah ini dapat menunjukkan pula tingkat daktilitas dari material baja tersebut. Pada baja mutu tinggi terdapat pula daerah plastis, namun pada daerah ini tegangan masih mengalami kenaikan. Karena itu baja jenis ini tidak mempunyai daerah plastis yang benar – benar datar sehingga tak dapat dipakai dalam analisa plastis
- d. Daerah penguatan regangan (*strain-hardening*) antara ε_{sh} dan ε_u . Untuk regangan lebih besar dari 15 hingga 20 kali regangan elastis maksimum, tegangan kembali mengalami kenaikan namun dengan kemiringan yang lebih kecil daripada kemiringan daerah elastis. Daerah ini dinamakan daerah penguatan regangan (*strain-hardening*), yang berlanjut hingga mencapai tegangan putus. Kemiringan daerah ini dinamakan modulus penguatan regangan (E_{st})

Dalam perencanaan struktur baja, SNI 1729–2015 mengambil beberapa sifat – sifat mekanik dari material baja yang sama yaitu :

Modulus Elastisitas, E	= 29.000 ksi (200.000 MPa)
Modulus Geser, G	= 11.200 ksi (72.200 MPa)
Angka <i>poisson</i>	= 0,3
Koefisien muai panjang, α	= $12 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$

Sedangkan berdasarkan tegangan leleh dan tegangan putusnya, SNI 03–1729–2002 mengklasifikasikan mutu dari material baja menjadi 5 kelas mutu yang disajikan pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Sifat – Sifat Mekanis Baja Struktural

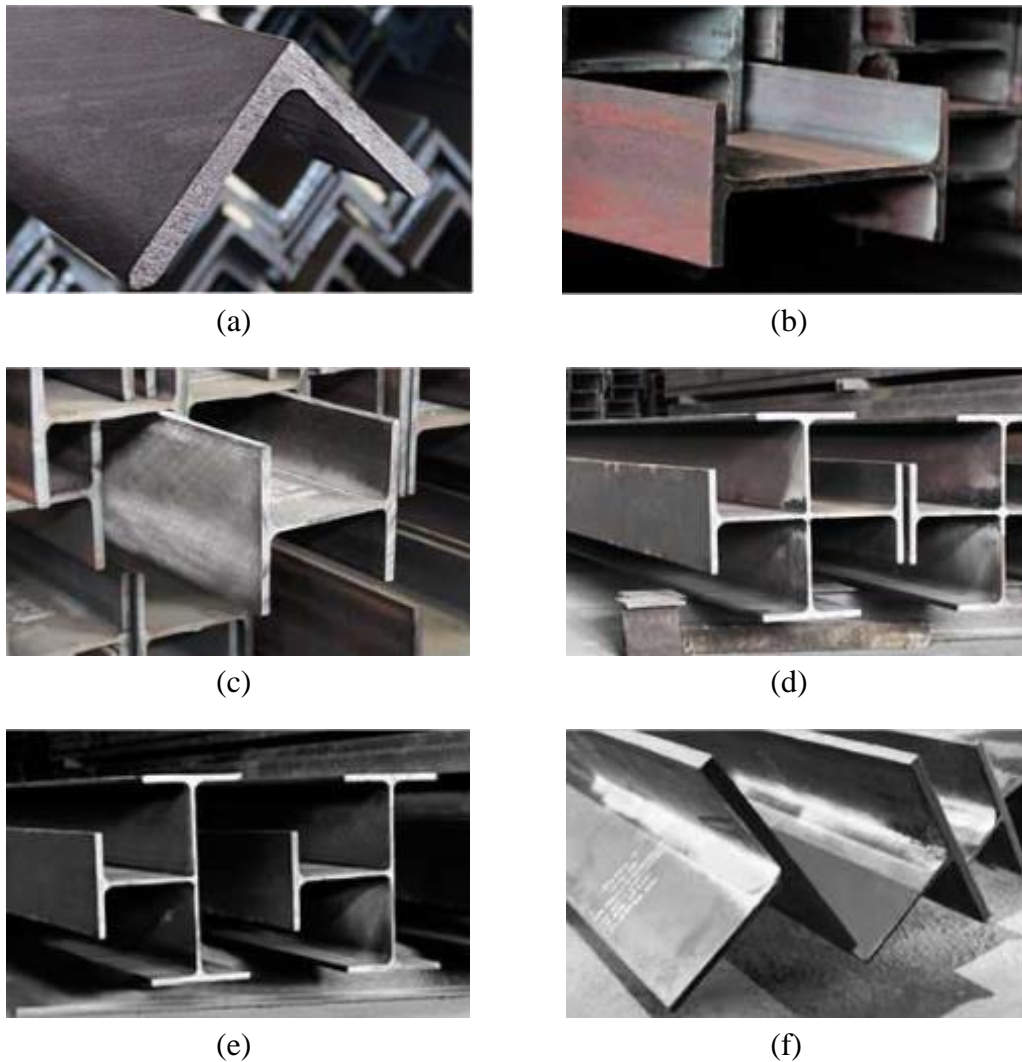
Jenis Baja	Tegangan Putus minimum, f_u (MPa)	Tegangan Leleh minimum, f_y (MPa)	Regangan minimum (%)
BJ 34	340	210	22
BJ 37	370	240	20
BJ 41	410	250	18
BJ 50	500	290	16
BJ 55	550	410	13

(Sumber: SNI 03-1729-2002)

5. Penampang Profil Baja

Bentuk penampang profil baja dipengaruhi oleh proses yang digunakan untuk membentuk baja tersebut. Sebagian besar baja dibentuk oleh proses *hot-rolling* (penggilingan dengan pemanasan) atau *cold-forming* (pembentukan dengan pendinginan).

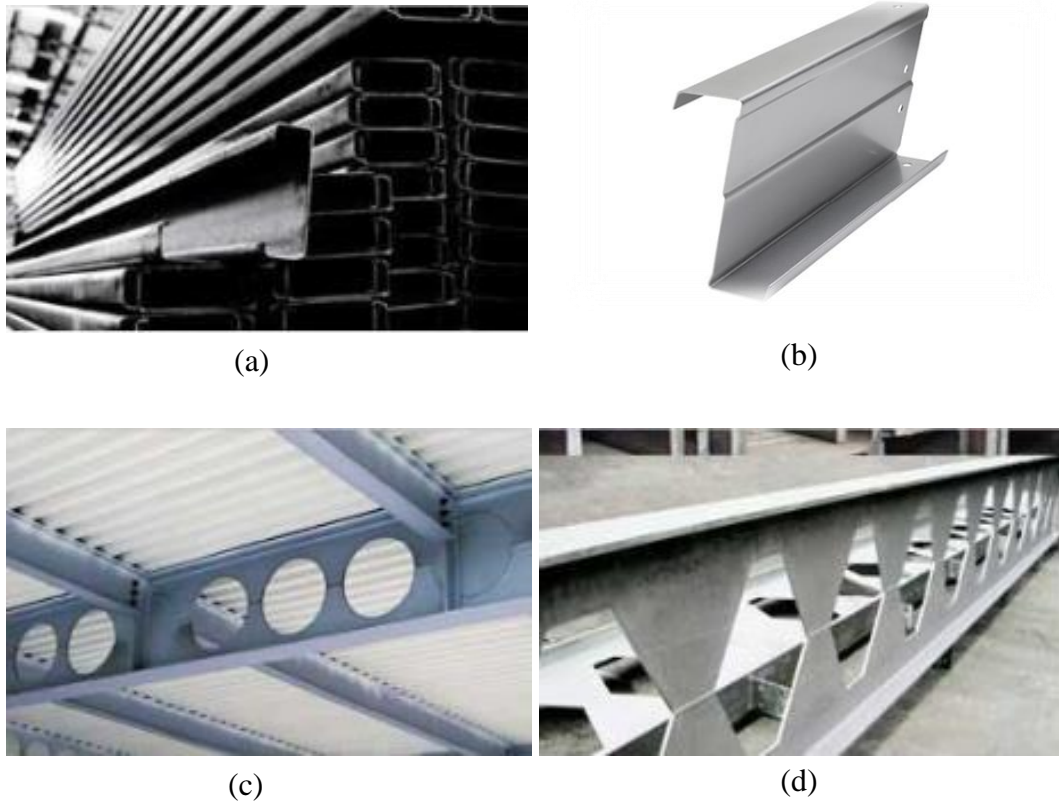
Penggilingan dengan pemanasan (*hot-rolling*) adalah proses pembentukan utama di mana bongkahan baja yang merah menyala secara besar-besaran digelindingkan di antara beberapa kelompok penggiling. Metode giling panas ini menghasilkan berbagai jenis penampang baja, seperti siku, *Wide Flange*, T, *H Beam* dengan berbagai jenis ukuran serta ketebalan. Contoh bentuk profil baja *hot-rolling* dapat dilihat pada Gambar 3.4



Gambar 3.4 (a) *Equal Angle* (b) *Wide Flange* (c) *H-Beam* (d) *King Cross*
(e) *Queen Cross* (f) *Tee Section*

(Sumber: www.gunungsteel.com)

Pembentukan dengan pendinginan (*cold-forming*) adalah metode lain yang digunakan untuk membuat komponen – komponen baja dalam jumlah yang besar. Dalam proses ini, lembaran baja tipis datar yang telah dihasilkan dari proses penggilingan dengan pemanasan dilipat atau dibengkokkan dalam keadaan dingin untuk membentuk penampang melintang struktur Metode bentukan dingin dapat digunakan untuk menghasilkan penampang dengan ketebalan tipis, seperti *Lip Channel*, *Z-section* atau pada pembuatan penampang baja ringan. Contoh bentuk profil baja *cold-forming* dapat dilihat pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5 (a) *Light Lip Channel* (b) *Z-Section* (c) *Cell Form* (d) *Honey Comb*
(Sumber: www.gunungsteel.com)

6. Kelebihan dan Kelemahan Baja Sebagai Material Konstruksi

Baja sebagai material konstruksi memiliki kelebihan dan kelemahan, berikut keunggulan baja sebagai material konstruksi :

a. Kekuatan Tinggi (*High Strength*)

Baja struktural umumnya mempunyai daya tarikan (*tensile strength*) antara 400 – 900 Mpa. Hal ini sangat berguna untuk dipakai pada struktur – struktur yang memiliki bentang panjang dan struktur pada tanah lunak.

b. Keseragaman (*Uniformity*)

Sifat – sifat baja tidak berubah karena waktu. Hampir seluruh bagian baja memiliki sifat – sifat yang sama sehingga menjamin kekuatannya.

c. Elastisitas (*Elasticity*)

Baja mendekati perilaku seperti asumsi yang direncanakan oleh perencana, karena mengikuti hukum Hooke, walaupun telah mencapai tegangan yang cukup tinggi. Modulus elastisitasnya sama untuk tarik dan tekan.

d. Daktilitas (*Ductility*)

Daktilitas adalah kemampuan struktur atau komponennya untuk melakukan deformasi inelastik bolak – balik berulang diluar batas titik leleh pertama, sambil mempertahankan sejumlah besar kemampuan daya dukung bebannya. Manfaat daktilitas ini bagi kinerja struktural adalah pada saat baja mengalami pembebanan yang melebihi kekuatannya, baja tidak langsung hancur tetapi akan meregang sampai batas daktilitas. Demikian juga pada beban siklik, daktilitas yang tinggi menyebabkan baja dapat menyerap energi yang besar.

e. Kuat Patah / Rekah (*Fracture Toughness*)

Baja adalah material yang sangat ulet sehingga dapat memikul beban yang berulang – ulang. Komponen struktur baja yang dibebani sampai mengalami deformasi besar, masih mampu menahan gaya – gaya yang cukup besar tanpa mengalami fraktur. Keuletan ini dibutuhkan jika terjadi konsentrasi tegangan walaupun tegangan yang masih dibawah batas yang diizinkan. Pada bahan yang tidak memiliki keuletan yang tinggi, keruntuhan dapat terjadi pada tegangan yang rendah dan akan bersifat getas (keruntuhan secara langsung).

Berikut kelemahan baja sebagai material konstruksi :

a. Biaya Perawatan (*Maintenance Cost*)

Baja bisa berkarat karena berhubungan dengan air dan udara. Oleh sebab itu, baja harus dicat secara berkala

b. Biaya Penahan Api (*Fire Proofing Cost*)

Kekuatan baja dapat berkurang drastis pada temperatur tinggi.

c. Kelelahan (*Fatigue*)

Kelelahan pada baja tidak selalu dimulai dengan *yielding* (leleh) atau deformasi yang sangat besar, tetapi dapat juga disebabkan beban siklik ataupun pembebanan berulang – ulang dalam jangka waktu yang lama. Kejadian ini sering terjadi dengan adanya konsentrasi tegangan karena adanya lubang.

d. Rekah Kerapuhan

Struktur baja ada kalanya tiba – tiba runtuh tanpa menunjukkan tanda – tanda deformasi yang membesar. Kegagalan ini sangat berbahaya dan harus dihindari. Berbeda dengan kelelahan, rekah kerapuhan disebabkan oleh beban statik.

B. Teori Elastisitas

Sifat mekanik yang dimiliki material antara lain: kekuatan (*strength*), ketahanan (*ductility*), kekerasan (*hardness*), dan kekuatan lelah (*fatigue*). Sifat mekanik material didefinisikan sebagai ukuran kemampuan material untuk mendistribusikan dan menahan gaya serta tegangan yang terjadi. Proses pembebanan, struktur molekul yang berada dalam ketidaksetimbangan, dan gaya luar yang terjadi akan mengakibatkan material mengalami tegangan. Sebuah material yang dikenai beban atau gaya akan mengalami deformasi, pada pembebanan di bawah titik luluh deformasi akan kembali hilang. Hal ini disebabkan karena material memiliki sifat elastis (*elastic zone*).

Jika beban ditingkatkan sampai melewati titik luluh (*yield point*), maka deformasi akan terjadi secara permanen atau terjadi deformasi plastis (*plastic deformation*). Jika beban ditingkatkan hingga melewati tegangan maksimal, maka material akan mengalami patah.

1. Tegangan (Stress)

Tegangan adalah besaran pengukuran intensitas gaya atau reaksi dalam yang timbul persatuan luas. Tegangan dibedakan menjadi dua yaitu *engineering stress* dan *true stress* (Marciniak dkk, 2002). Dalam praktek teknik, gaya umumnya diberikan dalam *pound* atau *newton*, dan luas yang menahan dalam inch^2 atau mm^2 . Akibatnya tegangan biasanya dinyatakan dalam pound/inch^2 yang sering disingkat *psi* atau Newton/mm^2 (MPa). Tegangan yang dihasilkan pada keseluruhan benda tergantung dari gaya yang bekerja.

Dalam praktek, kata tegangan sering memberi dua pengertian :

- a. Gaya per satuan luas atau intensitas tegangan, yang umumnya ditunjukkan sebagai tegangan satuan.

- b. Gaya dalam total suatu batang tunggal yang umumnya dikatakan sebagai tegangan total.

Pada saat benda menerima beban sebesar P kg, maka benda akan bertambah panjang sebesar ΔL mm. Saat itu pada material bekerja tegangan yang dapat dihitung dengan rumus (*engineering stress*) :

$$\sigma_{eng} = \frac{F}{A_0} \dots \dots \dots (3.1)$$

Keterangan : σ_{eng} = *Engineering stress* (pascal, N/m², MPa)

F = beban yang diberikan (*Newton, dyne*)

A_0 = luas penampang mula-mula (mm²)

Sedangkan *true stress* adalah tegangan hasil pengukuran intensitas gaya reaksi yang dibagi dengan luas permukaan sebenarnya (*actual*). *True stress* dapat dihitung dengan:

$$\sigma = \frac{F}{A} \dots \dots \dots (3.2)$$

dengan :

σ = *True stress* (MPa)

F = Gaya (N)

A = Luas permukaan sebenarnya (mm²)

Tegangan normal dianggap positif jika menimbulkan suatu tarikan (*tensile*) dan dianggap negatif jika menimbulkan penekanan (*compression*).

2. Regangan (*Strain*)

Regangan didefinisikan sebagai perubahan panjang material dibagi panjang awal akibat gaya tarik ataupun gaya tekan pada material. Batasan sifat elastis perbandingan regangan dan tegangan akan linier dan akan berakhir sampai pada titik mulur. Hubungan tegangan dan regangan tidak lagi linier pada saat material mencapai batasan fase sifat plastis. Regangan dibedakan menjadi dua, yaitu: *engineering strain* dan *true strain* (Marciniak dkk, 2002). *Engineering strain* adalah regangan yang dihitung menurut dimensi benda aslinya (panjang awal), sehingga untuk mengetahui besarnya regangan yang terjadi adalah dengan membagi perpanjangan dengan panjang semula.

$$\varepsilon_{eng} = \frac{l-l_0}{l_0} \times 100\% = \frac{\Delta l}{l_0} \times 100\% \dots \dots \dots (3.3)$$

dimana :

ε_{eng} = *Engineering strain*

Δl = Perubahan panjang

l_0 = Panjang mula-mula

l = Panjang setelah diberi gaya

True strain dapat dihitung secara bertahap (*increment strain*), dimana regangan dihitung pada kondisi dimensi benda saat itu (sebenarnya) dan bukan dihitung berdasarkan panjang awal dimensi benda. Persamaan regangan untuk *true strain* (ε) adalah :

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} \dots \dots \dots (3.4)$$

dimana :

ε = *True strain*

3. Elastisitas dan Plastisitas

Jika sebuah material diberi beban dan mengalami regangan tetapi bila beban dihilangkan material tersebut kembali ke bentuk semula maka hal ini dikatakan elastis. Elastisitas ini berada di daerah elastis, sebelum titik luluh (*yield point*). Selama material masih berada di daerah elastis, jika beban dihilangkan maka material akan kembali ke bentuk semula.

Bila suatu material mengalami tegangan maka akan terjadi perubahan bentuk. Bila tegangan yang bekerja besarnya tidak melewati suatu batas tertentu (batas elastis) maka akan terjadi perubahan bentuk yang bersifat sementara. Perubahan bentuk akan hilang bersama dengan hilangnya tegangan. Tetapi, bila tegangan yang bekerja telah melampaui batas tersebut maka sebagian dari perubahan bentuk itu tetap ada walaupun tegangan dihilangkan. Sedangkan plastisitas adalah perubahan bentuk yang permanen tanpa mengakibatkan terjadinya kerusakan. Sifat ini sering disebut keuletan (*ductile*). Bahan yang mampu mengalami *deformasi plastis* adalah bahan yang mempunyai keuletan tinggi dan sebaliknya bahan yang tidak deformasi plastis berarti mempunyai keuletan rendah atau getas.

4. Deformasi

Deformasi atau perubahan bentuk terjadi apabila bahan dikenai gaya. Selama proses deformasi berlangsung, material menyerap energi sebagai akibat adanya gaya yang bekerja. Sebesar apapun gaya yang bekerja pada material, material akan mengalami perubahan bentuk dan dimensi. Perubahan bentuk secara fisik pada benda dibagi menjadi dua, yaitu deformasi plastis dan deformasi elastis. Penambahan beban pada bahan yang telah mengalami kekuatan tertinggi tidak dapat dilakukan, karena pada kondisi ini bahan telah mengalami deformasi total. Jika beban tetap diberikan maka regangan akan bertambah dimana material seakan menguat yang disebut dengan penguatan regangan (*strain hardening*) yang selanjutnya benda akan mengalami putus pada kekuatan patah.

Pada awal pembebanan akan terjadi deformasi elastis sampai pada kondisi tertentu, sehingga material akan mengalami deformasi plastis. Pada awal pembebanan di bawah kekuatan luluh, material akan kembali ke bentuk semula. Hal ini dikarenakan adanya sifat elastis pada bahan. Peningkatan beban melebihi kekuatan luluh (*yield point*) yang dimiliki plat akan mengakibatkan aliran deformasi plastis sehingga plat tidak akan kembali ke bentuk semula.

Elastisitas bahan sangat ditentukan oleh modulus elastisitas. Modulus elastisitas suatu bahan didapat dari hasil bagi antara tegangan dan regangan.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \dots\dots\dots(3.5)$$

dengan :

E = Modulus elastisitas

σ = Tegangan (MPa)

ε = Regangan

5. *Yield Point* (Batas Luluh)

Jika beban yang bekerja pada material diteruskan hingga diluar batas elastis akan terjadi perpanjangan atau perpendekan permanen secara tiba – tiba. Ini disebut *yield point* atau batas luluh dimana regangan meningkat sekalipun tiada peningkatan tegangan (hanya terjadi pada baja lunak). Setelah melewati titik ini, material tidak akan kembali ke bentuk semula, atau material sedang berada dalam daerah plastis.

6. Kriteria *Von Mises*

Von Mises (1913) mengajukan pendapatnya bahwa luluh pada sistem tegangan yang kompleks akan terjadi pada saat deviator kedua dari invariant tegangannya melewati suatu nilai kritis tertentu. Persamaan ini adalah persamaan matematis yang ternyata konsisten dengan fakta empiris. Hasil percobaan menunjukkan bahwa material yang bersifat anisotropis, kriteria luluh tidak tergantung pada sumbu atau orientasi bidang, atau dengan kata lain merupakan suatu fungsi invarian dari tegangan.

Hencky (1924) memberikan tafsir persamaan matematis yang telah diajukan oleh *Von Mises* tersebut. Hencky mengajukan pendapatnya bahwa luluh akan terjadi pada saat energi distorsi atau energi regangan geser dari material mencapai suatu nilai kritis tertentu. Secara sederhana dapat dikatakan bahwa energi distorsi adalah bagian dari energi regangan total per unit volume yang terlibat di dalam perubahan bentuk. Bagian lain adalah bagian yang berhubungan dengan perubahan volume.

Teori ini memperkirakan suatu kegagalan mengalah dalam tegangan geser yang memadai lebih besar dari yang diperkirakan oleh teori tegangan geser maksimal. Teori keruntuhan *Von Mises yield criterion* digunakan pada penelitian ini sebagai acuan dalam analisis tegangan yang digunakan. Teori tersebut umum digunakan dalam analisis tegangan pada balok baja. Berikut pada Persamaan 3.6, ditunjukkan rumus yang digunakan pada analisis *Von Mises yield criterion* (Srinath, 2009).

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_y^2 \dots\dots\dots(3.6)$$

dengan :

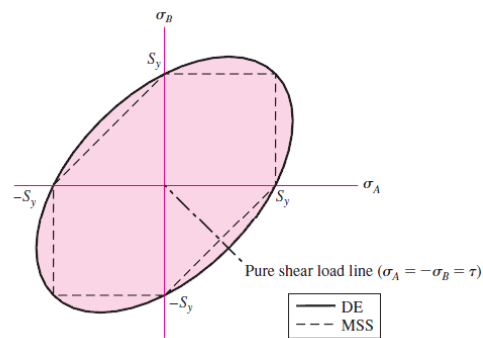
σ_x = tegangan pada arah 1 / arah sumbu x

σ_y = tegangan pada arah 2 / arah sumbu y

σ_z = tegangan pada arah 3 / arah sumbu z

σ' = tegangan *Von Mises*

Hal ini akan terjadi kegagalan jika :



Gambar 3.6 Perbandingan teori tegangan geser maksimum dengan distorsi energi

Dari percobaan – percobaan yang telah dilakukan, menunjukkan bahwa teori energi distorsi (*Von Mises*) memperkirakan kegagalan dengan ketelitian tertinggi pada semua kuadran.

C. Balok

1. Balok Secara Umum

Balok adalah komponen struktur horizontal nominal yang memiliki fungsi utama untuk menahan momen lentur (SNI 1729:2015). Bentang struktural yang didesain untuk menahan gaya – gaya yang bekerja dalam arah transversal terhadap sumbunya disebut balok (*beam*). Berdasarkan pada arah bekerjanya beban–beban, maka balok berbeda dari batang yang mengalami tarik dan batang yang mengalami puntiran (Gere, 1996).

2. Balok Kantilever

Balok yang salah satu ujungnya dijepit (*bulit in* atau *fixed*) dan yang lainnya bebas, disebut sebuah balok konsol (*cantilever beam*). Pada penyangga jepit, balok tidak dapat bertranslasi maupun berputar, sedangkan pada ujung bebas ia dapat mengalami keduanya. Akibatnya, naik reaksi–reaksi gaya momen dapat hadir pada penyangga jepit (Gere, 1996).

3. Balok Non Prismatis

Balok non prismatis adalah balok – balok yang mempunyai penampang berbeda pada tiap bagian–bagiannya dan balok – balok tirus. Bila sebuah balok

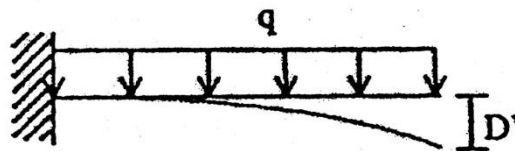
mempunyai dimensi penampang yang berubah secara tiba – tiba, maka pada titik dimana perubahan tersebut akan terjadi konsentrasi tegangan lokal, akan tetapi tegangan lokal ini tidak mempunyai pengaruh yang berarti terhadap perhitungan lendutan. (Gere, James M., 1996)

D. Analisis Konstruksi Balok

Secara umum analisis struktur dapat dilakukan atas 3 hal berikut ini:

1. Menentukan hubungan antar aksi (*action*) dan deformasi (*deformation*) yang dikenal sebagai *constitutive law*.
2. Pertimbangan kinematis dari struktur yang terdeformasi (*compatibility*)
3. Keseimbangan (*equilibrium*) antara gaya-gaya yang bekerja (*applied forces*) dan gaya-gaya dalam (*internal forces*)

Dalam penelitian ini, digunakan metode analisis struktur dengan Metode Fleksibilitas (*flexibility method/force method*). Dalam metode fleksibilitas ini, gaya merupakan variabel utama yang tidak diketahui, dan dicari lebih dahulu. Sedangkan *displacement* dapat diperoleh pada tahap berikutnya berdasarkan gaya-gaya yang telah diperoleh dari step sebelumnya.



Gambar 3.7 Fleksibilitas balok kantilever terbebani beban merata

(Sumber: Suhendro, 2000)

Persamaan yang digunakan dalam formulasi yaitu persamaan aksi – deformasi.

$$D' = \frac{q \cdot L^4}{8 EI} \dots\dots\dots(3.7)$$

dimana:

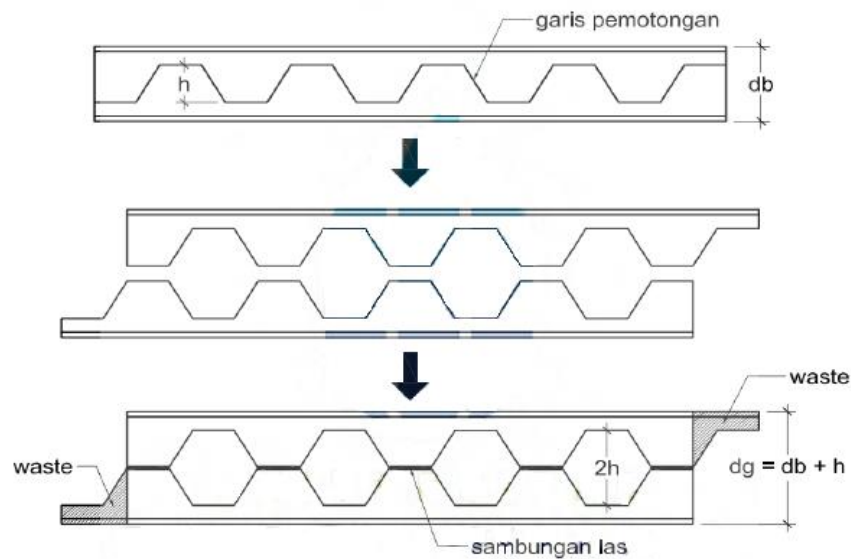
- | | | | |
|------|--------------------------------|-----|-----------------------|
| D' | = <i>Displacement</i> maksimal | E | = Modulus Elastisitas |
| q | = Beban merata | I | = Momen Inersia Balok |
| L | = Panjang bentang balok | | |

E. *Castellated Beam*

1. Konsep Dasar *Castellated Beam*

Balok kastela pertama kali dikenal dengan istilah *Open web expanded beams and girder* (perluasan balok dan girder dengan badan berlubang) adalah balok yang mempunyai elemen pelat badan berlubang, yang dibentuk dengan cara membelah bagian tengah pelat badan, kemudian bagian bawah dari belahan tersebut dibalik dan disatukan kembali antara bagian atas dan bawah dengan cara digeser sedikit kemudian dilas. Gagasan semacam ini pertama kali dikemukakan oleh H.E Horton dari Chicago dan Iron Work sekitar tahun 1910.

Castellated beam adalah profil I, H atau U yang pada bagian badannya dipotong memanjang dengan pola zig – zag. Kemudian bentuk dasar baja diubah dengan cara menggeser setengah bagian profil baja yang telah dipotong. Penyambungan setengah bagian profil dengan cara dilas pada bagian gigi – giginya. Sehingga terbentuk profil baru dengan lubang berbentuk segi enam (*hexagonal*), segi delapan (*octagonal*), dan lingkaran (*circular*). (Johann Grunbauer, 2011)



Gambar 3.8 Proses Pembuatan *Castellated Beam*

(Sumber : *Johann Grunbauer, 2011*)

Dengan adanya pemotongan seperti ini maka akan terjadi penambahan ketinggian penampang profil sehingga momen inersia penampang juga akan meningkat, dan pada akhirnya meningkatkan kapasitas momen/kekuatan lentur

vertikal pada balok. *Castellated beam* telah terbukti efisien untuk bentang – bentang panjang (lebih dari 8 meter) dengan pembebanan sederhana yang dirancang dan dikontrol momen kapasitas dan defleksinya. Selain itu *castellated beam* juga memiliki rasio kekuatan terhadap berat yang tinggi dan perawatan yang cukup mudah.

2. Perilaku *Castellated Beam*

Dengan adanya bukaan lubang pada badan, perilaku *castellated beam* akan berbeda dengan balok tanpa adanya bukaan. Kerdal dan Nethercot (1984) menentukan bahwa terdapat enam mode kegagalan dari *castellated beam* :

a. Formasi dari mekanisme *Vierendeel*

Mekanisme *vierendeel* disebabkan kebutuhan untuk mentransfer gaya geser pada lubang bukaan agar konsisten dengan laju perubahan momen lentur (Wakchaure M.R., dkk, 2012). Mekanisme ini berbanding lurus dengan tegangan geser yang cukup tinggi dalam balok. Sendi plastis terjadi pada ujung balok (*reentrant corners*) pada lubang dapat merubah bagian bentuk bagian T (*Tee section*) menjadi seperti jajar genjang (*pararrellogram*) (Altifillisch, 1957; Toprac dan Cook, 1959).

b. Tekuk lateral – torsi dari *Web post*

Titik leleh yang terjadi pada bagian T (*Tee Section*) bagian atas dan bagian bawah ujung awal *castellated beam* hampir sama dengan profil IWF solid pada kondisi *under pure bending forces* (Toprac dan Cook, 1959; Halleux 1967).

c. Lateral *torsional buckling*

Nethercot dan Kerdal (1982) menyimpulkan bahwa pada *web opening* mempunyai efek yang diabaikan pada lateral *torsional buckling* pada balok – balok yang telah mereka uji.

d. *Web post buckling*

Toprac dan Cook (1959) dan Hosain dan Speirs (1973) menyebutkan bahwa kegagalan jenis ini dapat terjadi sebagai akibat dari pemberian beban terpusat yang secara langsung diberikan melebihi *web post*.

Kegagalan jenis ini dapat dicegah dengan menambahkan pengaku (*stiffener*).

e. Kegagalan pada sambungan las

Sambungan las yang terdapat antara lubang dapat putus (*rupture*) ketika tegangan geser horizontal yang terjadi melampaui kekuatan leleh pengelasannya (Hosain dan Speirs, 1971). Panjang horizontal pada lubang bukaan sama dengan panjang pengelasan antar lubang. Ketika panjang horizontal berkurang untuk menambah *secondary moment* (*Veriendeel truss*) maka las sepanjang badan profil menjadi lebih mudah gagal. Mekanisme *Veriendeel* biasanya terjadi pada balok dengan jarak lubang yang cukup panjang

f. Formasi dari mekanisme lentur

Metode kegagalan ini dapat terjadi ketika sebuah bagian mengalami momen lentur murni (Wakchaure M.R., dkk, 2012). Wakchaure M.R (2012) lebih lanjut menjelaskan bahwa bentang yang mengalami lentur murni, bagian T (*Tee section*) atas dan bawah lubang dihasilkan dengan cara yang mirip dengan bagian *web*, meskipun penyebaran momen lentur terhadap as dihentikan oleh keberadaan lubang bukaan ketika bagian antara lubang menjadi plastis sempurna akibat gaya tekan ataupun tarik.

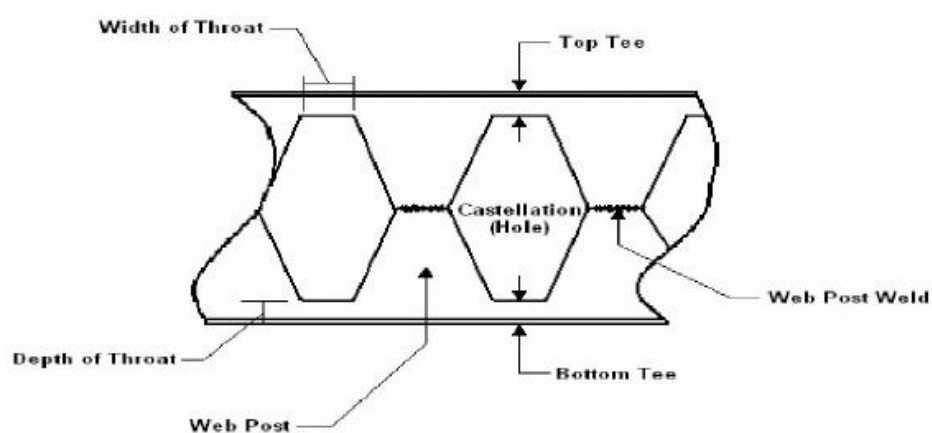
3. Komponen *Castellated Beam*

Castellated beam dapat dianggap sebagai balok terlentur yang mana komponen strukturnya lebih dominan dalam menahan beban gravitasi baik pada arah melintang maupun memanjang, seperti beban mati dan beban hidup. Komponen struktur balok merupakan kombinasi antara elemen tekan dan tarik pada arah serat tertentu.

Komponen – komponen pada *castellated beam* memiliki penamaannya masing–masing. Komponen – komponen tersebut antara lain sebagai berikut (Bradley, 2003) :

- a. *Web–post* adalah bagian penampang melintang dari *castellated beam* dimana penampang diasumsikan penampang penuh

- b. *Castellation Hole* adalah area dari *castellated beam* dimana *web* sudah dinaikkan (bagian lubang bukaan)
- c. *Width of Throat* adalah lebar dari pemotongan arah horizontal pada *web* balok
- d. *Depth of Throat* adalah kedalaman lubang bukaan diukur dari tepi *flange* ke bagian penampang T
- e. *Expansion percentage* adalah presentase kenaikan dari ketinggian IWF sebelum dipotong dan sesudah menjadi *castellated beam*



Gambar 3.9 Komponen *Castellated Beam*

(Sumber: Bradley, 2003)

F. Metode Elemen Hingga

1. Analisis Struktur dengan Metode Elemen Hingga

Untuk mengetahui suatu perilaku struktur dengan dimensi, properti bahan, dan jenis tumpuan tertentu dalam menahan beban yang terjadi, dapat didekati dengan pemodelan secara numerik dengan metode elemen hingga yang mana suatu struktur dibagi menjadi elemen – elemen kecil dengan bentuk geometri tertentu sesuai kasus yang terjadi. Di era komputerisasi seperti sekarang ini, telah banyak dikembangkan *software* berbasis metode elemen hingga yang dapat digunakan dengan cukup mudah. Adapun *software* yang dimaksud antara lain *software Adina, midas NFX, ANSYS, RFEM, Lusas, NASTRAN, LISA-FEA, ABAQUS*, dan lain – lain. Diharapkan dengan adanya *software* tersebut, permasalahan pemodelan suatu elemen struktur dengan metode elemen hingga dapat

diselesaikan dengan mudah dan cepat. Hasil pemodelan suatu elemen struktur yang akurat dengan prinsip metode elemen hingga, akan memiliki derajat ketelitian yang jauh lebih baik jika dibandingkan dengan penyelesaian analisis dengan cara lain.

Persamaan umum dalam metode elemen hingga :

$$[K] \{U\} = \{F\} \dots\dots\dots(3.8)$$

dimana :

- [K] : Matriks kekakuan elemen
- {U} : Matriks perpindahan elemen
- {F} : Matriks gaya yang bekerja pada elemen

Hubungan antara tegangan dan regangan pada suatu struktur yang bahannya *homogeny, isotropic*, dan *elastic* secara umum dapat dirumuskan sebagai berikut (Suhendro, 2000) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(3.9)$$

Perpindahan u_i , v_i , dan w_i pada sembarang titik titik pada suatu body dapat dinyatakan sebagai berikut (Wang, 1977) :

$$u_i = U + y\varphi_z \quad v_i = V + x\varphi_z \quad w_i = W_k - yv_{i,x} - xu_{i,x} \dots\dots\dots(3.10)$$

Dengan U , V , dan W berturut-turut adalah perpindahan lateral, vertikal, dan longitudinal pada pertemuan antara sayap dan badan, φ_z adalah sudut puntir, x dan y adalah koordinat sumbu referensi.

Hubungan antara regangan dan perpindahan dapat dinyatakan :

$$\varepsilon_x = e_x + \frac{1}{2} \left[e_x^2 + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_z \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xx} - \omega_y \right)^2 \right] \dots\dots\dots(3.11)$$

$$\varepsilon_y = e_y + \frac{1}{2} \left[e_y^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right)^2 \right] \dots\dots\dots(3.12)$$

$$\varepsilon_z = e_z + \frac{1}{2} \left[e_z^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right)^2 \right] \dots\dots\dots(3.13)$$

$$\varepsilon_{yz} = e_{yz} + e_y \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) + e_z \left(\frac{1}{2} e_{zy} - \omega_x \right) + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \dots (3.14)$$

$$\varepsilon_{zx} = e_{zx} + e_z \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_z \right) + e_x \left(\frac{1}{2} e_{zx} - \omega_x \right) + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_z \right) \dots (3.15)$$

$$\varepsilon_{xy} = e_{xy} + e_x \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) + e_y \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) + \left(\frac{1}{2} e_{zx} - \omega_y \right) \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_x \right) \dots (3.16)$$

Dengan : $e_x = u_{,x}$ $e_y = u_{,y}$ $e_z = u_{,z}$

$$\varepsilon_{yz} = W_{,y} + v_{,z} \quad \varepsilon_{zx} = u_{,z} + w_{,x} \quad \varepsilon_{xy} = u_{,y} + u_{,x}$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} (W_{,y} - v_{,z}) = \frac{1}{2} (u_{,zy} - w_{,x}) \quad \omega_x = \frac{1}{2} (v_{,x} - u_{,y})$$

Pada persamaan diatas u, v, dan w berturut – turut adalah komponen perpindahan pada arah x, y, dan z dan koma menyatakan turunan yang sesuai dengan koordinat yang mengikutinya.

Secara umum, suatu struktur yang kontinu terdiri dari *material point* yang tak terhingga banyaknya, dan oleh karena itu struktur tersebut mempunyai derajat kebebasan *degree of freedom* yang tak terhingga banyaknya pula (Suhendro, 2000). Untuk mendekati suatu sistem yang kontinu dengan menggunakan suatu sistem yang berhingga (*finite*), maka dikembangkan metode *Rayleigh–Ritz* (1909). Metode *Rayleigh–Ritz* merupakan suatu metode pendekatan dimana suatu sistem yang kontinu menjadi suatu sistem yang memiliki derajat kebebasan yang berhingga. Metode ini dapat digunakan untuk analisis deformasi, stabilitas, perilaku non linier struktur, dan analisis dinamik.

Kesulitan utama yang timbul dalam pemakaian metode *Rayleigh–Ritz* adalah memilih fungsi – fungsi kontinu $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi_1, \dots, \psi_n$, dan η_1, \dots, η_n pada persamaan, yang selanjutnya disebut *shape functions*.

$$\begin{aligned} u &= a_1 \cdot \phi_1(x,y,z) + a_2 \cdot \phi_2(x,y,z) + \dots + a_n \cdot \phi_n(x,y,z) \\ v &= b_1 \cdot \psi_1(x,y,z) + a_2 \cdot \psi_2(x,y,z) + \dots + b_n \cdot \psi_n(x,y,z) \dots \dots \dots (3.17) \\ w &= c_1 \cdot \eta_1(x,y,z) + a_2 \cdot \eta_2(x,y,z) + \dots + b_n \cdot \eta_n(x,y,z) \end{aligned}$$

Supaya Metode *Rayleigh–Ritz* dapat diaplikasikan pada analisis struktur dengan bentuk geometri yang tak teratur sekalipun, maka ada prinsip – prinsip yang harus dipenuhi antara lain sebagai berikut :

- a. Karena fungsi $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$, $w = w(x,y,z)$ adalah *continuous*, maka bila diamati variasinya pada elemen kecil yang merupakan bagian dari domain problem atau strukturnya, variasi tersebut cukup dekat untuk dinyatakan dalam fungsi fungsi sederhana seperti konstan atau *polynomial* berorde rendah dalam x,y,z .
- b. Bila domain masalah strukturnya dibagi menjadi banyak sekali elemen – elemen kecil yang bentuk geometrinya cukup sederhana, maka dengan digunakan *polynomial* sederhana sudah memberikan hasil yang cukup teliti untuk mendekati fungsi *displacement* u, v, w pada masing masing elemen kecil tersebut.
- c. Jika *domain problem* atau strukturnya dibagi menjadi N elemen, maka energi potensial total (π) dari sistem tersebut merupakan jumlah dari energi potensial dari masing masing elemen (π_e) dengan persamaan sebagai berikut :

$$\pi = \sum_{e=1}^N \pi_e \dots\dots\dots(3.18)$$

- d. Berdasarkan prinsip – prinsip di atas dapat dipakai untuk memperoleh perkiraan yang dekat dari energi potensial total dengan cara menjumlah seluruh π_e yang dimiliki oleh masing–masing elemen. Selanjutnya, prinsip – prinsip di atas bersama – sama dengan prinsip metode matriks, akan dikombinasikan dan dikembangkan menjadi metode elemen hingga.

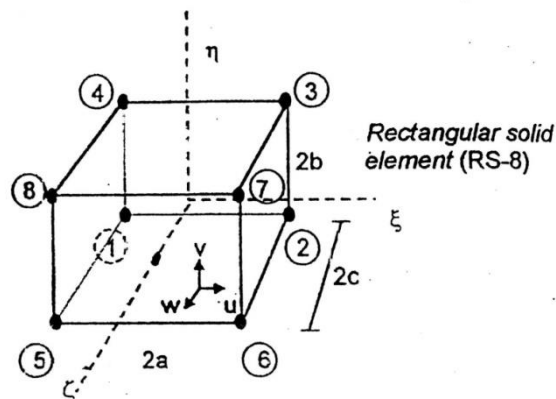
2. Jenis Elemen 3–Dimensional Solid

Dalam analisis struktur metode elemen hingga, elemen sangat mempengaruhi perhitungan, dalam penelitian ini *castellated beam* diidealisasikan sebagai elemen 3–Dimensional Solid dikarenakan mempunyai sayap yang lebar dan terbuat dari material solid baja.

Menurut Suhendro (2002), jenis elemen pada 3–Dimensional solid yang paling banyak digunakan adalah 3 macam yaitu :

a. *Element Rectangular Solid (RS-8)*

Merupakan jenis elemen *Hexahedral*, yang bentuk elemen ini seperti bata (*brick*) yang mempunyai titik nodal minimal 8 buah. Elemen ini mempunyai 3 *degree of freedom* pada setiap titik nodalnya, sehingga secara keseluruhan elemen ini mempunyai 24 *degree of freedom*. Pada pengaplikasiannya, elemen ini hanya digunakan untuk menganalisis bentuk struktur yang beraturan saja karena bentuknya yang menyerupai kubus. Gambar elemen ini dapat dilihat pada Gambar 3.10

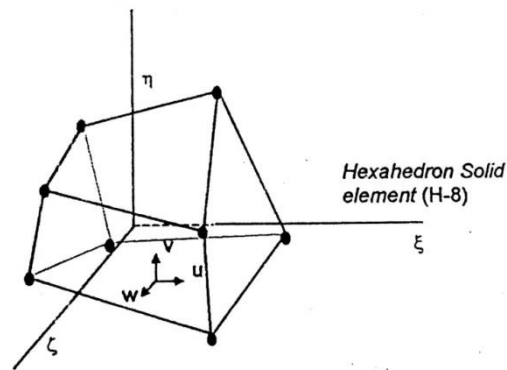


Gambar 3.10 Elemen *Rectangular Solid (RS-8)*

(Sumber: Suhendro, 2000)

b. *Elemen Hexahedron Solid (H-8)*

Merupakan jenis elemen *Hexahedral*, yang mana elemen ini merupakan pengembangan dari elemen *Rectangular Solid (RS-8)*, mempunyai 6 sisi (*hexahedron side*) tapi bentuknya tidak berbentuk kubus sempurna. Sama seeti halnya dengan elemen *Rectangular Solid*, maka elemen ini mempunyai 3 *degree of freedom* pada setiap nodalnya, sehingga setara keseluruhan elemen ini juga mempunyai 24 *degree of freedom*. Elemen ini digunakan untuk menganalisis bentuk struktur yang agak beraturan saja. Gambar elemen ini dapat dilihat pada Gambar 3.11



Gambar 3.11 Elemen *Hexahedron Solid* (H-8)

(Sumber: Suhendro, 2000)

1) Matriks Perpindahan Elemen *Hexahedral*

$$\begin{aligned}
 u &= a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \zeta + a_5 \xi \eta + a_6 \eta \zeta + a_7 \xi \zeta + a_8 \xi \eta \zeta \\
 v &= a_9 + a_{10} \xi + a_{11} \zeta + a_{12} \zeta + a_{13} \xi \eta + a_{14} \eta \zeta + a_{15} \xi \zeta + a_{16} \xi \eta \zeta \dots\dots\dots(3.19) \\
 w &= a_{17} + a_{18} \xi + a_{19} \eta + a_{20} \zeta + a_{21} \xi \eta + a_{22} \eta \zeta + a_{23} \xi \zeta + a_{24} \xi \eta \zeta
 \end{aligned}$$

Dengan kata lain, u, v, dan w dinyatakan sebagai fungsi dari *nodal displacements* yang berjumlah 8 buah.

$$\begin{aligned}
 \{u\}_{1 \times 24}^T &= \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ u_3 \ v_3 \ w_3 \ u_4 \ v_4 \ w_4 \\
 &\quad u_5 \ v_5 \ w_5 \ u_6 \ v_6 \ w_6 \ u_7 \ v_7 \ w_7 \ u_8 \ v_8 \ w_8\} \dots\dots\dots(3.20)
 \end{aligned}$$

Dengan prosedur serupa, nilai matriks [N] dan [B] dapat diperoleh.

Matriks [N] atau *Shape Function* digunakan pada matriks berikut :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 & f_4 & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 & f_4 & 0 \\ 0 & 0 & f_1 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 & f_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 f_5 & 0 & 0 & f_6 & 0 & 0 & f_7 & 0 & 0 & f_8 & 0 & 0 \\
 0 & f_5 & 0 & 0 & f_6 & 0 & 0 & f_7 & 0 & 0 & f_8 & 0 \\
 0 & 0 & f_5 & 0 & 0 & f_6 & 0 & 0 & f_7 & 0 & 0 & f_8
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 w_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 w_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 w_3 \\
 u_4 \\
 v_4 \\
 w_4 \\
 u_5 \\
 v_5 \\
 w_5 \\
 u_6 \\
 v_6 \\
 w_6 \\
 u_7 \\
 v_7 \\
 w_7 \\
 u_8 \\
 v_8 \\
 w_8
 \end{Bmatrix}
 \dots\dots\dots(3.21)$$

Dari operasi perkalian matriks di atas, dapat dilihat bahwa matriks [N] merupakan matriks yang dapat mengkonversikan suatu matriks *nodal displacement* (pada titik – titik tertentu yang ditinjau) menjadi suatu matriks *displacement* komponen di semua titik.

Dengan nilai matriks [N] adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix}
 f_1 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 & f_4 & 0 & 0 \\
 0 & f_1 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 & f_4 & 0 \\
 0 & 0 & f_1 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 & f_4 \\
 f_5 & 0 & 0 & f_6 & 0 & 0 & f_7 & 0 & 0 & f_8 & 0 & 0 \\
 0 & f_5 & 0 & 0 & f_6 & 0 & 0 & f_7 & 0 & 0 & f_8 & 0 \\
 0 & 0 & f_5 & 0 & 0 & f_6 & 0 & 0 & f_7 & 0 & 0 & f_8
 \end{bmatrix}$$

dimana

$$f_1 = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta)$$

$$f_2 = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta)$$

$$f_3 = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta)$$

$$f_4 = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta)$$

$$f_5 = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta)$$

$$f_6 = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta)$$

$$f_7 = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta)$$

$$f_8 = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta)$$

Adapun nilai matriks [B] digunakan untuk mencari nilai matriks regangan dengan rumus sebagai berikut :

$$\{\varepsilon\}_{6 \times 1} = [D]_{6 \times 3} [N]_{3 \times 24} \{u\}_{24 \times 1} = [B]_{6 \times 24} \{u\}_{24 \times 1} \dots \dots \dots (3.22)$$

Dengan nilai matriks [B] adalah :

$$[k_t^{(e)}]_{(24 \times 24)} = \iiint_V [B]_{24 \times 6}^T [E]_{6 \times 6} [B]_{6 \times 24} dv \dots \dots \dots (3.23)$$

2) Matriks Kekakuan Elemen *Hexahedral*

Matriks kekakuan elemen dapat dihitung dengan rumusan matriks sebagai berikut :

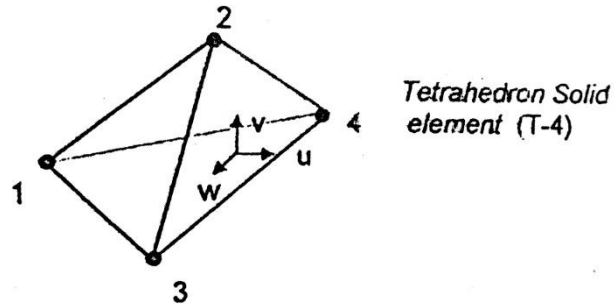
$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N] \dots \dots \dots (3.24)$$

Integrasi pada persamaan di atas diselesaikan secara numerik dengan metode *Gauss-Quadrature*

c. Elemen *Tetrahedron Solid* (T-4)

Elemen ini mempunyai 4 sisi, yang mana elemen ini baik digunakan untuk menganalisis struktur yang geometrinya tidak beraturan. Pada penelitian ini, elemen *Tetrahedron Solid* inilah yang digunakan untuk mendiskretisasi

balok kastela yang geometrinya tidak teratur khususnya pada bagian sekitar bukaan. Adapun bentuk geometri dari elemen ini dapat dilihat pada Gambar 3.12.



Gambar 3.12 Elemen *Tetrahedron Solid* (T-4)

(Sumber: Suhendro, 2000)

1) Matriks Perpindahan Elemen *Tetrahedron*

Adapun bentuk *displacement functions* (trilinear) yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z \\ v &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 z \quad \dots\dots\dots(3.25) \\ w &= a_9 + a_{10} x + a_{11} y + a_{12} z \end{aligned}$$

Dengan kata lain, u , v , dan w dinyatakan sebagai fungsi dari *nodal displacements* yang berjumlah 4 buah. Adapun urutan *degree of freedom* adalah sebagai berikut :

$$\{\mathbf{u}\}_{1 \times 12}^T = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ u_3 \ v_3 \ w_3 \ u_4 \ v_4 \ w_4 \} \dots\dots\dots(3.26)$$

Dengan prosedur serupa pula, matriks $[N]$ dan $[B]$ dapat diperoleh. Matriks $[N]$ atau yang biasanya disebut *shape functions* pada elemen *Tetrahedron Solid* memiliki rumusan operasi matriks yang sama dengan matriks $[N]$ pada elemen *Hexahedron*, hanya saja jumlah titik *nodal displacement* yang ditinjau pada elemen *Tetrahedron Solid* berbeda yaitu di 4 titik sehingga berpengaruh pada besaran orde matriks $[N]$. Adapun bentuk operasi perkalian matriks pada jenis elemen ini dapat dilihat sebagai berikut :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 & f_4 & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 & f_4 & 0 \\ 0 & 0 & f_1 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 & f_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} \dots\dots (3.27)$$

Matriks [B] pada elemen *Tetrahedron* memiliki bentuk sebagai berikut :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 & f_4 & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 & f_4 & 0 \\ 0 & 0 & f_1 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 & f_4 \end{bmatrix} \dots\dots(3.28)$$

Seperti pada elemen *Hexahedral*, matriks [B] pada elemen *Tetrahedron* juga digunakan untuk mencari nilai matriks regangan dengan menggunakan pola rumusan yang sama.

2) Matriks Kekakuan Elemen *Tetrahedron*

Adapun matriks kekakuan elemennya dapat dihitung dengan rumusan sebagai berikut :

$$[k_l^{(e)}]_{(12 \times 12)} = \iiint_V [B]_{12 \times 6}^T [E]_{6 \times 6} [B]_{6 \times 12} dv \dots\dots\dots(3.29)$$

Integrasi diselesaikan secara numerik dengan metode *Gauss-Quadrature*