MATERI KULIAH

MATEMATIKA TEKNIK II

DISUSUN OLEH:

SUDARJA

JURUSAN TEKNIK MESIN

FAKULTAS TEKNIK

UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH YOGYAKARTA

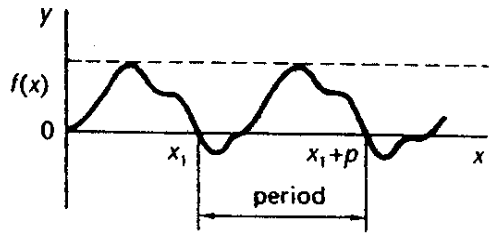
2017

BAB I

DERET FOURIER

1.1.FUNGSI PERIODIK *(PERIODIC FUNCTION)*

Suatu fungsi f(x) dikatakan periodik jika harga fungsi berulang pada interval-interval yang teratur pada variabel bebas (Stroud).



Gambar 1.1. Fungsi periodik

Suatu fungsi f(x) dikatakan periodik jika pada semua harga x ada harga p positif sedemikian sehingga:

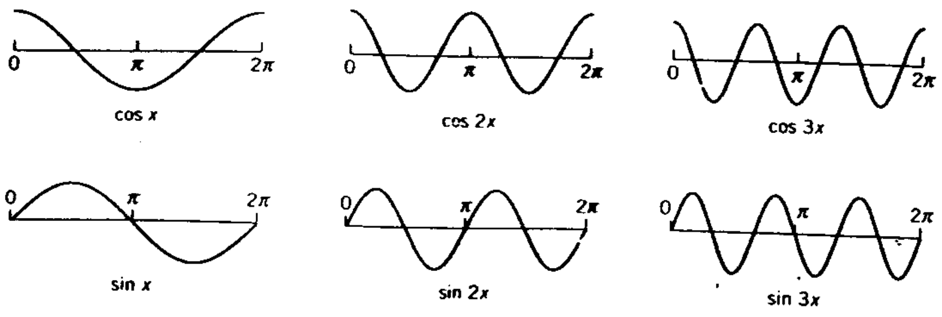
$f(x+p)=f(x)$, untuk semua x (Kreyszig). (1)

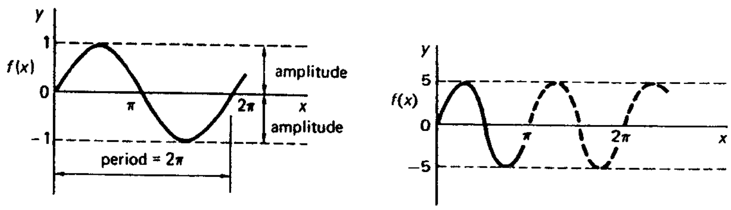
p disebut periode dari f(x). Dari (1),untuk setiap integer n :

$f(x+np)=f(x)$, untuk semua harga x (2)

Contoh-contoh fungsi periodik:

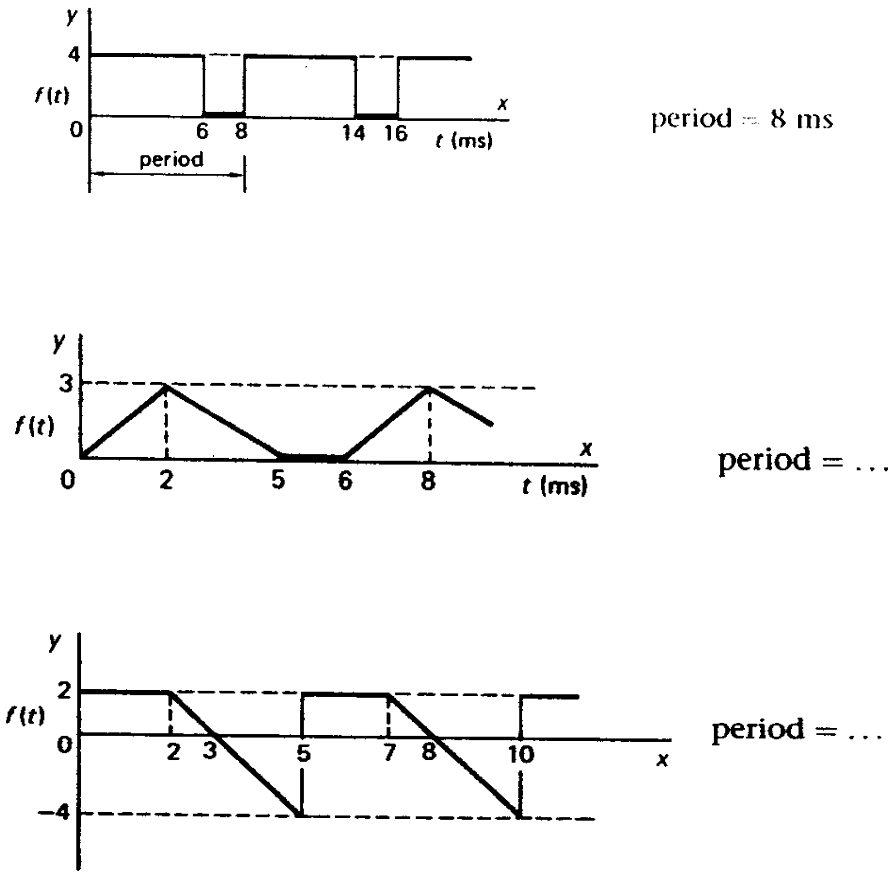
a. Bentuk sinus dan cosinus





Gambar 1.2. Bentuk fungsi sinus

b. Fungsi non sinusoidal



Gambar 1.3. Contoh-contoh fungsi periodik non sinusoidal

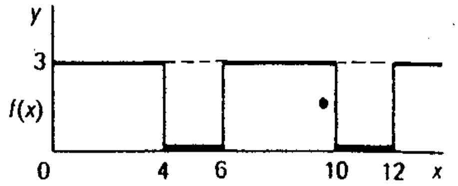
Latihan:

1. Tentukan amplitudo dan periode dari fungsi-fungsi berikut:

a. y=3sin5x	e. y=5cos4x
b. y=2cos3x	f. y=2sinx
c. y=sin(x/2)	g. y=3cos6x
d. y=4sin2x	h. y=6sin(2x/3)

Deskripsi Analitis dari Fungsi Periodik

Contoh 1



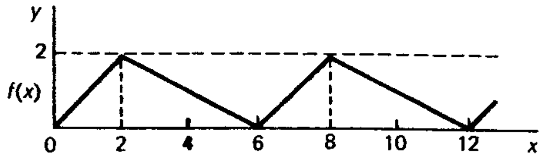
Antara x=0 dan x=4, y=3, maka f(x)=3   0<x<4

Antara x=4 dan x=6, y=0, maka f(x)=0   4<x<6

$$f(x) = \begin{cases} 3 \ ; & 0 < x < 4 \\ 0 \ ; & 4 < x < 6 \end{cases}$$

f(x+6)=f(x); periode=6

Contoh 2



Dengan cara yang sama dengan di atas, didapatkan:

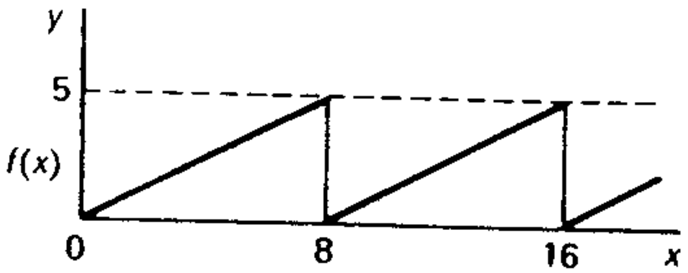
$$f(x) = \begin{cases} x \ ; & 0 < x < 2 \\ 3 - \left(\frac{x}{2}\right); & 2 < x < 6 \end{cases}$$

f(x+6)=f(x); periode=6

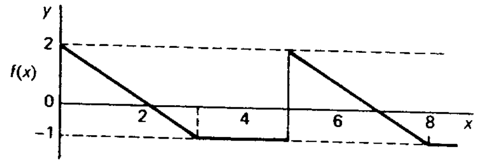
Latihan:

Tentukan bentuk fungsi periodik berikut, secara analitik.

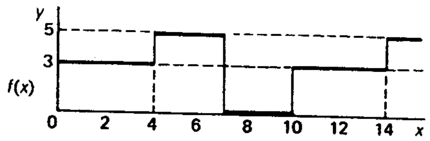
a.



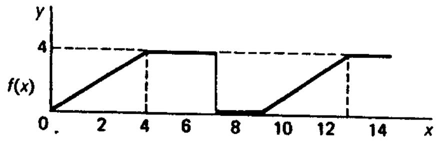
b.



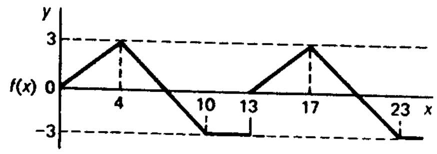
c.



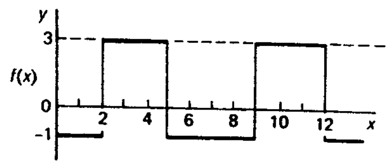
d.



e.



f.



Latihan

Gambarkan grafik fungsi-fungsi berikut ini:

a. $$f(x) = \begin{cases} 4; & 0 < x < 5 \\ 0; & 5 < x < 8 \end{cases}$$

f(x+8)=f(x)

b. $f(x)=3x-x^2$ $\quad 0<x<3$

$f(x+3)=f(x)$

c. $$f(x) = \begin{cases} 2\sin x; & 0 < x < \pi \\ 0\ ; & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$f(x+2\pi)=f(x)$

d. $$f(x) = \begin{cases} x/2; & 0 < x < \pi \\ \pi - \left(\frac{x}{2}\right)\ ; & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

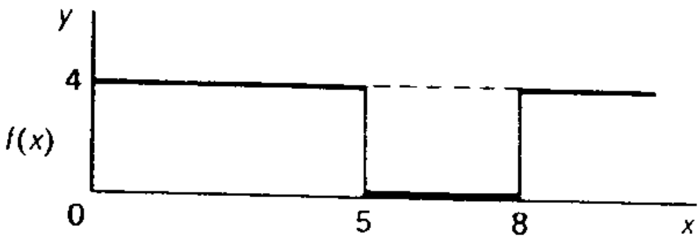
$f(x+2\pi)=f(x)$

e. $$f(x) =; \begin{cases} \frac{x^2}{4}\ ; & 0 < x < 4 \\ 4\ ; & 4 < x < 6 \\ 0 & 6 < x < 8 \end{cases}$$

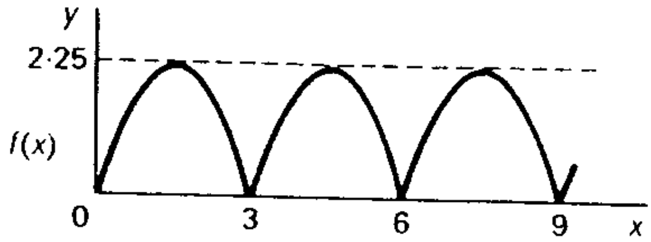
$f(x+8)=f(x)$

Jawab:

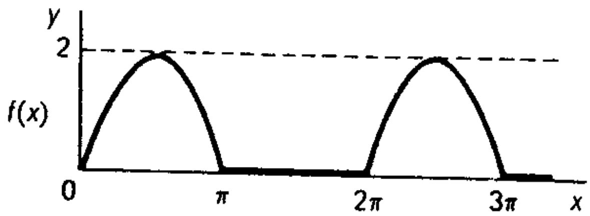
a.



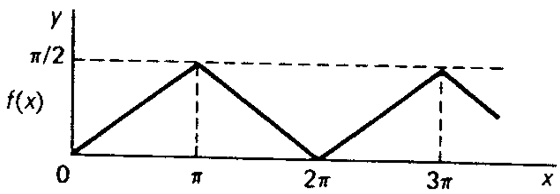
b.



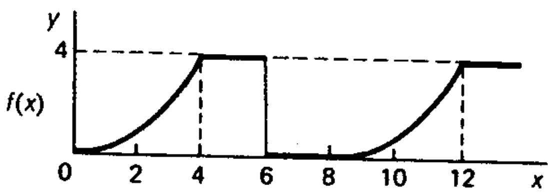
c.



d.



e.



1.2. DERET FOURIER

Jika suatu fungsi f(x) merupakan fungsi periodik dengan periode (p) = 2L, maka deret Fourier dari fungsi tersebut adalah:

- **<u>Versi buku Kreyszig</u>**

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi}{L}x + b_n sin\frac{n\pi}{L}x)$$

(3)

Dengan koefisien-koefisien Fourier dari f(x) sebagai berikut (didapatkan dari formula Euler):

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x).dx$$

(3.a)

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x).\cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad ; n = 1,2, \ldots.$$

(3.b)

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x).\sin\frac{n\pi x}{L}dx \quad ; n = 1,2, \ldots.$$

(3.c)

- **<u>Versi buku Stroud</u>**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi}{L}x + b_n sin\frac{n\pi}{L}x)$$

(4)

Dengan koefisien-koefisien Fourier dari f(x) sebagai berikut (didapatkan dari formula Euler):

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x).dx$$

(4.a)

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x).\cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad ; n = 1,2, \ldots.$$

(4.b)

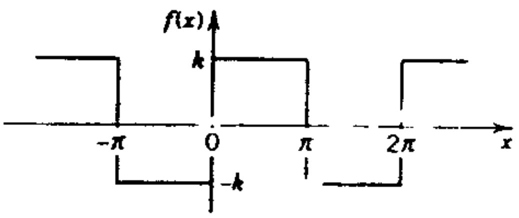
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x).\sin\frac{n\pi x}{L}dx \quad ; n = 1,2, \ldots.$$

(4.c)

<u>Contoh 1</u> : Gelombang segi empat periodik *(Periodic rectangular wave)*

Tentukan koefisien Fourier dan deret Fourier dari sebuah fungsi periodik f(x) dengan bentuk fungsi dan gambar berikut:

$f(x) = \begin{cases} -k & pada \quad -\pi < x < 0 \\ k & pada \quad 0 < x < \pi \end{cases}$ dan $f(x+2\pi) = f(x)$



<u>Penyelesaian:</u>

Contoh munculnya fungsi semacam ini adalah gaya luar *(external forces)* yang terjadi pada mechanical system atau gaya elektromotif *(electromotive forces)* pada rangkaian listrik *(electric circuits).*

Periode (=p) = 2L = 2 π sehingga L = π

Dari persamaan (3.a) didapatkan $a_0 = 0$, karena jumlah luas kurva f(x) antara –π dan π adalah 0.

Dengan persamaan (3.b)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx.dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\cos nx.dx + \int_{0}^{\pi} k.\cos nx.dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-k\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} \quad + k\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} \quad\right] \;=\; 0$$

karena sin nx = 0 pada $-\pi$, 0 dan π untuk semua n = 1,2,.....

Dengan persamaan (3.c), kita dapatkan:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin nx.dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\sin nx.dx + \int_{0}^{\pi} k.\sin nx.dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[k\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} \quad - k\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} \quad\right]$$

Karena $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ dan $\cos 0 = 1$; maka:

$$b_n = \frac{k}{n\pi}[\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2k}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

Sekarang, $\cos\pi = -1$, $\cos 2\pi = 1$, $\cos 3\pi = -1$ ....dst

Secara umum :

$$\cos n\pi = \begin{cases} -1 & untuk\ n\ ganjil \\ 1 & untuk\ n\ genap \end{cases}$$

dan

$$1 - \cos n\pi = \begin{cases} 2 & untuk\ n\ ganjil \\ 0 & untuk\ n\ genap \end{cases}$$

Koefisien Fourier b_n dari fungsi f(x) di atas adalah:

$$b_1 = \frac{4k}{\pi};\quad b_2 = 0;\quad b_3 = \frac{4k}{3\pi};\quad b_4 = 0;\quad b_5 = \frac{4k}{5\pi}\ ; \ldots\ldots dst$$

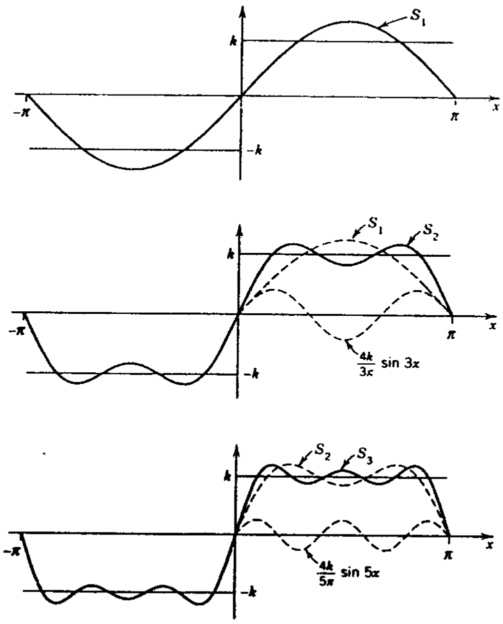
Karena $a_0 = 0$ dan $a_n = 0$, maka deret Fourier dari f(x) adalah:

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

Secara parsial, penjumlahan dari deret Fourier tersebut adalah:

$$S_1 = \frac{4k}{\pi}\sin x\ ; \qquad S_2 = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\right)\ ;\ \ \ldots.dst$$

Grafik pada gambar di bawah menunjukkan bahwa deret cenderung konvergen ke f(x).



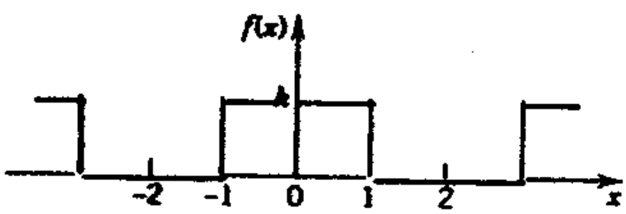
Gambar 1.4. Grafik dari contoh 1

Contoh 2 : Gelombang segi empat periodik *(Periodic rectangular wave)*

Tentukan koefisien Fourier dan deret Fourier dari sebuah fungsi periodik f(x) dengan bentuk fungsi dan gambar berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 0\ ;\ pada\ -2 < x < -1 \\ k\ ;\ pada\ \ -1 < x < 1 \\ 0\ ;\ \ pada\ \ \ 1 < x < 2 \end{cases}$$

p = 2L = 4 → L=2



Penyelasaian :

Dari persamaan (3.a) dan (3.b):

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x).dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} k.dx = \frac{k}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x).cos\frac{n\pi x}{2}.dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k.cos\frac{n\pi x}{2}.dx = \frac{2k}{n\pi}sin\frac{n\pi}{2}$$

$a_n = 0$; untuk n genap

$a_n = \frac{2k}{n\pi}$; untuk n = 1,5,9, ...

$a_n = -\frac{2k}{n\pi}$; untuk n = 3,7,11, ...

Dari persamaan (3.c) diperoleh $b_n = 0$; untuk n= 1,2,3, ...

Maka,

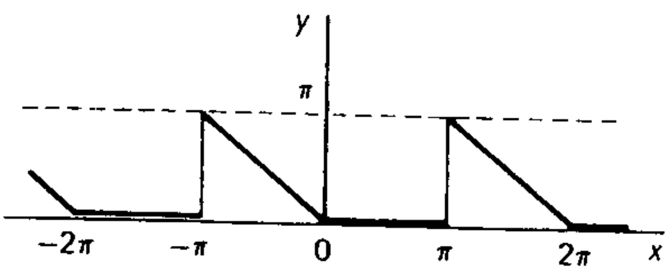
$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{3}cos\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{5}cos\frac{5\pi}{2}x - + \cdots\right)$$

Contoh 3:

Tentukan deret Fourier dari suatu fungsi f(x) yang berbentuk:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & pada\ -\pi < x < 0 \\ 0, & pada\ \ 0 < x < \pi \end{cases}$$

$f(x+2\pi) = f(x)$



Penyelesaian :

Dengan menggunakan persamaan (4), (4.a), (4.b) dan (4.c),

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x).dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).cos\,nx.dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x).cos\,nx.dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x.\cos nx.dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left\{\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]\begin{matrix}0\\-\pi\end{matrix} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx.dx\right\}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left\{(0-0) - \frac{1}{n}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]\begin{matrix}0\\-\pi\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{\pi n^2}\{1-\cos n\pi\}$$

cos nπ = 1 ; untuk n genap

cos nπ = -1 ; untuk n ganjil

maka,

$$a_n = -\frac{2}{\pi n^2}\quad ;untuk\ n\ ganjil \qquad dan \qquad a_n = 0\ \ ;untuk\ n\ genap$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).sin\,nx.dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x).sin\,nx.dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x.\sin nx.dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left\{\left[x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\right]\begin{matrix}0\\-\pi\end{matrix} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nx.dx\right\}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi.\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]\begin{matrix}0\\-\pi\end{matrix}\right\} = \frac{\cos\ n\pi}{n}$$

$$b_n = -\frac{1}{n}\quad ;untuk\ n\ ganjil \qquad dan \qquad b_n = \frac{1}{n}\ \ ;untuk\ n\ genap$$

Jadi:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right) + \left(-\sin x + \frac{1}{2}\sin\ 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x - \cdots\right)$$

Soal-soal latihan:

Tentukan deret Fourier dari fungsi- fungsi periodik berikut ini:

1. $f(x) = \begin{cases} -1, & pada\ -1 < x < 0 \\ 1, & pada\ \ 0 < x < 1 \end{cases}$ $\qquad$ p = 2L = 2

2. $f(x) = \begin{cases} 1, & pada\ -1 < x < 0 \\ -1, & pada\ \ 0 < x < 1 \end{cases}$ $\qquad$ p = 2L = 2

3. $f(x) = \begin{cases} 0, & pada\ -2 < x < 0 \\ 2, & pada\ \ 0 < x < 2 \end{cases}$ $\qquad$ p = 2L = 4

4. $f(x) = \frac{x}{2}\ ;\ \ pada\ \ 0 < x < 2\pi\ ;\qquad f(x+2\pi) = f(x)\ ;$ $\qquad$ p = 2L = 2π

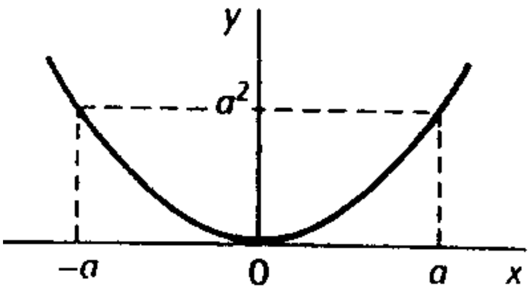
5. $f(t) = \begin{cases} 2(1+t), & pada\ -1 < t < 0 \\ 0, & pada\ \ 0 < t < 1 \end{cases}$ $\qquad$ f(t + 2) = f(t) $\qquad$ p = 2L = 2

1.3. FUNGSI GENAP DAN FUNGSI GANJIL

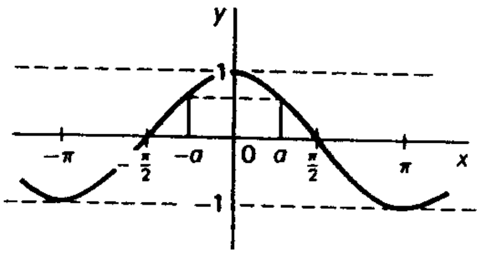
1.3.1. Fungsi genap *(Even function)*

Suatu fungsi f(x) disebut fungsi genap jika f(-x) = f(x), artinya harga fungsi untuk x negatif tertentu sama dengan harga fungsi pada x positif yang berlawanan. Secara grafis fungsi genap selalu **simetris terhadap sumbu y**. Contoh fungsi genap, antara lain:

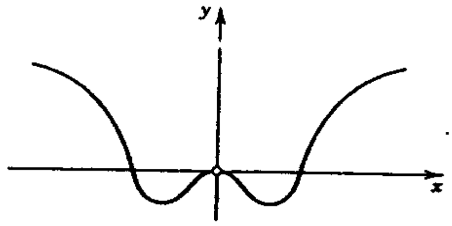
a. y = f(x) = x^2 ; karena f (-3) = 9 = f(3)

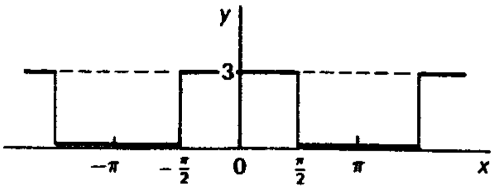


b. y = f(x) = cos x ; karena cos(-x) = cos x, cos(-π) = cos π



c. Contoh yang lain:





Sifat integral fungsi genap: $\int_{-L}^{L} f(x).dx = 2\int_{0}^{L} f(x).dx$

Deret Fourier dari fungsi genap atau sering disebut "Deret Cosinus Fourier" *("Fourier Cosine Series")* berbentuk:

<u>Versi Kreyszig:</u>

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\frac{n\pi}{L}x$$

(5)

Dengan koefisen-koefisien Fourier :

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x).dx$$

(5.a)

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x).\cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad ; n = 1,2, \ldots.$$

(5.b)

Versi Stroud:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\frac{n\pi}{L}x$$

(6)

Dengan koefisen-koefisien Fourier :

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x).dx$$

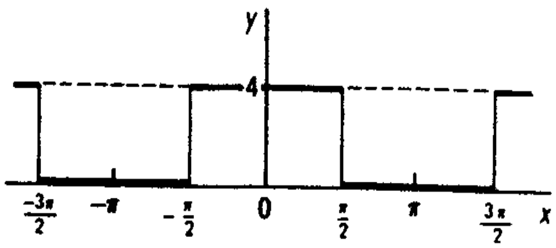
(6.a)

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x).\cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad ; n = 1,2, \ldots.$$

(6.b)

Contoh 4:

Suatu fungsi berbentuk gelombang yang simetris terhadap sumbu y seperti gambar di bawah. Tentukan deret Fourier-nya.



Penyelesaian:

Fungsi ini merupakan fungsi genap, maka dengan persamaan (6.a) dan (6.b):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x).dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4.dx = \frac{2}{\pi}\,[4x]_0^{\pi/2} = 4$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos nx\,.dx = \frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi/2} = \frac{8}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0\,; & untuk\,n\,genap \\ 1\,; untuk\,n = 1{,}5{,}9{,}.. \\ -1\,; untuk\,n = 3, 7, 11, \ldots \end{cases}$$

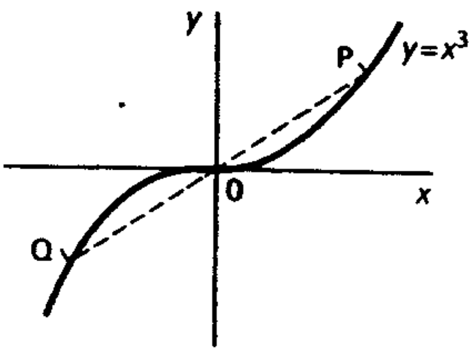
$b_n = 0$

$$f(x) = 2 + \frac{8}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \cdots\right)$$

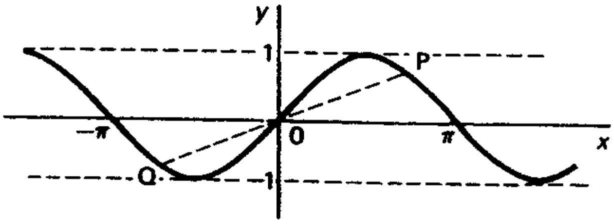
1.3.2. Fungsi ganjil *(Odd function)*

Suatu fungsi f(x) disebut fungsi ganjil jika f(-x) = -f(x), artinya harga fungsi untuk x negatif tertentu sama dengan negatif harga fungsi pada x positif yang berlawanan. Secara grafis fungsi ganjil selalu **simetris terhadap sumbu titik pusat atau *the origin* (0,0)**. Contoh fungsi ganjil, antara lain:

a. y = f(x) = x^3 ; karena f (-2) = -8 = -f(2)



b. y = f(x) = sin x ; karena sin(-x) = - sin x



Sifat integral fungsi ganjil: $\int_{-L}^{L} f(x).dx = 0$

Deret Fourier dari fungsi ganjil atau sering disebut "Deret Sinus Fourier" *("Fourier Sine Series")* berbentuk:

Versi Kreyszig maupun Stroud:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \tag{7}$$

Dengan koefisen Fourier :

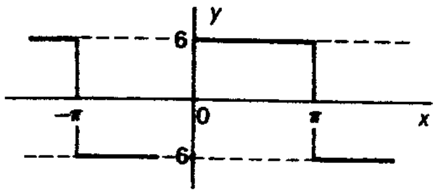
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x).\sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad ; n = 1,2, ... \tag{7.a}$$

Contoh 5:

Suatu fungsi berbentuk :

$$f(x) = \begin{cases} -6 \; ; \; pada\ -\pi < x < 0 \\ 6 \; ; \; pada\ \ 0 < x < \pi \end{cases}$$

$f(x+2\pi) = f(x)$



Tentukan deret Fourier dari fungsi tersebut.

Penyelesaian:

Fungsi tersebut merupakan fungsi ganjil, sehingga deretnya berbentuk sinus (a_0=0 dan a_n=0)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 6.\sin\frac{n\pi x}{\pi}\,dx \quad ;\ n = 1,2,\ \ldots.$$

$$b_n = \frac{12}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{12}{\pi n}(1-\cos n\pi)$$

b_n = 0 untuk n genap dan $b_n = \frac{24}{\pi n}$ untuk n ganjil

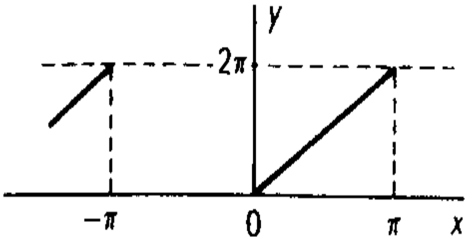
sehingga deret Fourier dari fungsi tersebut adalah:

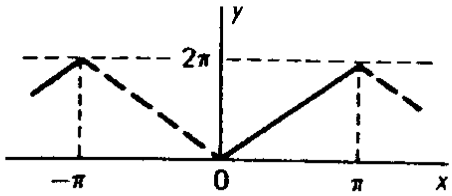
$$f(x) = \frac{24}{\pi}\left\{\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right\}$$

1.4. DERET DARI FUNGSI SETENGAH PERIODE *(HALF-RANGE SERIES)*

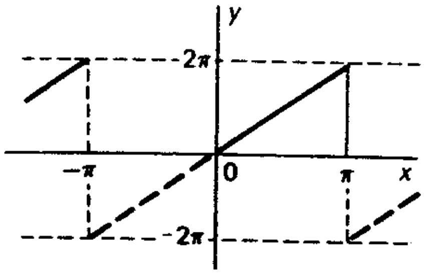
Kadang-kadang suatu fungsi dengan periode 2π tidak dinyatakan secara penuh (normal) pada interval –π sampai π atau 0 sampai 2π, tetapi hanya diketahui pada interval 0 sampai π. Dalam hal seperti ini, kita mempunyai pilihan bagaimana lengkapnya fungsi tersebut dan bagaimana menyelesaikannya. Dalam setiap kasus, kita membuat asumsi bagaimana bentuk fungsi pada interval x = –π sampai x = 0, dan deret Fouriernya didapatkan hanya dari f(x) pada x = 0 dan x = π yang sudah diketahui (ditentukan). Deret yang dihasilkan dari perlakuan seperti ini disebut ***Half-Range Series***.

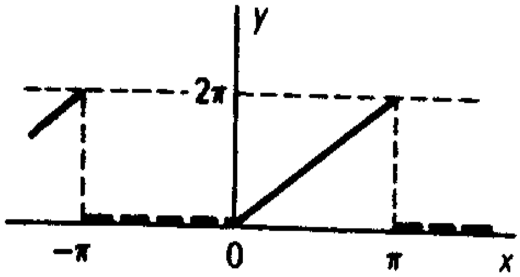
Sebagai contoh, jika mempunyai fungsi antara x=0 dan x=π ; f(x) = 2x, kemudian, karena periodenya 2π, kita tidak mempunyai informasi bagaimana bentuk fungsi pada interval antara x=-π dan x=0.





(a)



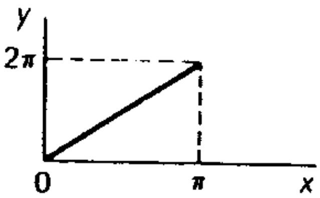


(b) (c)

Jika bentuk lengkap dari fungsi menjadi bentuk gelombang seperti gambar (a), maka fungsinya menjadi fungsi genap (simetris terhadap sumbu y) dan deretnya berbentuk cosinus (termasuk kemungkinan adanya koefisien a_0) atau disebut ***Half-Range Cosine Series***. Sebaliknya jika bentuk gelombang seperti gambar (b), maka fungsinya menjadi fungsi ganjil (simetris terhadap titik pusat sumbu) dan deretnya berbentuk sinus atau disebut ***Half-Range Sine Series***. Jika kita memilih bentuk yang berbeda dari dua hal tersebut, misalnya seperti gambar (c) maka fungsinya merupakan fungsi periodik bukan fungsi genap dan bukan fungsi ganjil, dan deretnya terdiri dari sinus, cosinus dan a_0.

Contoh 6:

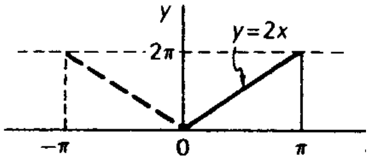
Suatu fungsi f(x) berbentuk: $f(x) = 2x$ pada $0 < x < \pi$ dan $f(x+2\pi) = f(x)$



Tentukan *half-range cosine series* yang mewakili fungsi tersebut.

Penyelesaian:

Untuk mendapatkan deret cosinus, maka fungsi harus diasumsikan sebagai fungsi genap. Oleh karena itu, maka grafik fungsinya harus dilukiskan seperti gambar berikut:



$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x).dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x.dx = \frac{2}{\pi}\left[x^2\right]_0^{\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x.\cos nx\,.dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{8} x.\cos nx.dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\left\{\left[\frac{x.\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin nx.dx\right\}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left\{(0-0) - \frac{1}{n}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{4}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1)$$

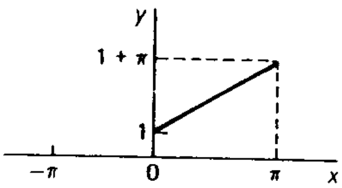
n genap → cos nπ = 1 → an = 0

n ganjil → cos nπ = -1 → $a_n = -\frac{8}{\pi n^2}$

sehingga $f(x) = \pi - \frac{8}{\pi}\left\{\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right\}$

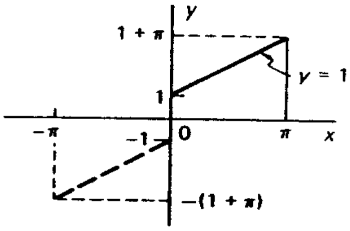
<u>Contoh 7:</u>

Tentukan <u>*half-range sine series*</u> yang mewakili fungsi berbentuk: f(x) =1+x pada 0<x<π dan f(x+2π)=f(x).



<u>Penyelesaian:</u>

Karena diminta deret sinus, maka bentuk fungsi lengkapnya harus berbentuk fungsi ganjil dan grafiknya simetris terhadap pusat sumbu seperti gambar berikut:



$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x).\sin nx\,.dx = \frac{2}{\pi}\left\{\left[(1+x)\frac{.-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx.dx\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{1+\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n} - \frac{1+\pi}{n}\cos n\pi\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi n}\{1-(1+\pi)\cos n\pi\}$$

Untuk n genap → cos nπ = 1 → $b_n = -\frac{2}{n}$

Untuk n ganjil → cos nπ = -1 → $b_n = \frac{4+2\pi}{\pi n}$

Sehingga:

$$f(x) = \frac{4+2\pi}{\pi}\left\{\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right\} - 2\left\{\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 6x + \cdots\right\}$$

BAB II

PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL (PDP)

2.1. KONSEP DASAR *(BASIC CONCEPT)*

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) atau *Partial Differential Equation (PDE)* adalah suatu persamaan yang melibatkan satu atau lebih turunan parsial dari suatu fungsi yang belum diketahui (misalnya u) yang tergantung pada dua variable atau lebih (biasanya variable waktu, t, dan beberapa variable ruang, x, y, z, dsb) (Kreyszig, 2006). Orde dari PDP ditentukan oleh turunan (derivatif) tertinggi.

Seperti halnya pada Persamaan Diferensial Biasa (PDB), PDP disebut linier jika variable yang belum diketahui u berpangkat satu. Jika pangkat dari u tidak satu, maka disebut PDP nonlinier. Jadi semua PDP pada contoh dibawah adalah linier. PDP disebut homogen jika semua suku mengandung u atau turunan parsialnya, sebaliknya disebut nonhomogen. Jadi PDP no (4) pada contoh 1 dibawah adalah non homogen (dengan f yang tidak sama dengan nol) dan yang lainnya adalah homogen.

Contoh 1. PDP orde dua yang penting

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ *One-dimensional wave equation*

(2) $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ *One-dimensional heat equation*

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ *Two-dimensional Laplace equation*

(4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$ *Two-dimensional Poisson equation*

(5) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$ *Two-dimensional wave equation*

(6) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$ *Three-dimensional Laplace equation*

Disini c adalah konstanta positif, t adalah waktu, x,y,z adalah koordinat-koordinat Cartesian. Dimensi ditentukan oleh jumlah koordinat-koordinat tersebut dalam persamaan.

Penyelesaian PDP dalam suatu ranah R dari variabel-variabel bebas adalah suatu fungsi yang mempunyai semua turunan parsial pada PDP di domain D yang berisi R, dan memenuhi PDP dimanapun pada ranah R.

Secara umum, penyelesaian PDP secara total sangat besar/luas. Sebagai contoh, fungsi-fungsi berikut (yang berbeda satu sama lain) merupakan penyelesaian (solusi) dari (3).

$$(7) \quad u = x^2 - y^2, \qquad u = e^x \cos y, \qquad u = \sin x \cosh y, \qquad u = \ln (x^2 + y^2)$$

Penyelesaian khusus *(unique solution)* dari PDP sebagaimana yang diberikan persoalan fisiknya, akan didapatkan dengan menggunakan **syarat tambahan *(additional condition)***. Ini mungkin syarat bahwa solusi u dipengaruhi oleh nilai pada batas *region* R, disebut **syarat batas *(boundary condition)*,** atau jika t merupakan salah satu variabel dalam u, yang menggambarkan kondisi pada t=0, disebut **syarat awal *(initial condition)***.

TEOREMA 1 : TEOREMA DASAR UNTUK SUPERPOSISI

Jika u_1 dan u_2 adalah solusi dari sebuah PDP yang linier homogen pada *region* R,

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

dengan konstanta c_1 dan c_2 juga merupakan sebuah solusi dari PDP tersebut pada *region* R.

Penulisan turunan pada PDP seringkali disingkat sebagai berikut:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \qquad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ ; \qquad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ ; \qquad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Contoh 2: Penyelesaian PDP $u_{xx} - u = 0$ seperti PDB

Tentukan solusi u dari PDP: $u_{xx} - u = 0$, yang tergantung pada x dan y

Penyelesaian :

Karena tidak ada turunan ke y, maka kita dapat menyelesaikan PDP tersebut seperti PDB: u`` – u = 0. Penyelesaian dari PDB tersebut tentunya adalah: $\mathbf{u = Ae^{x} + Be^{-x}}$ dengan A dan B adalah konstanta. Di sini konstanta A dan B mungkin suatu fungsi y, sehingga solusinya menjadi:

$$\mathbf{u(x,y) = A(y).e^{x} + B(y).e^{-x}}$$

Di sini sekarang A dan B merupakan fungsi sembarang.

Contoh 3: Penyelesaian PDP $u_{xy} = -u_x$ seperti PDB

Tentukan solusi u = u (x,y) dari PDP tersebut.

Penyelesaian :

Dimisalkan ux=p, maka py = -p. py/p = -1. Jika diintegralkan ke y:

$$\ln p = -y + \tilde{c}(x)$$

$$p = c(x)e^{-y}$$

Selanjutnya diintegralkan ke x

$$u(x, y) = f(x)e^{-y} + g(y)$$

Dengan

$$f(x) = \int c(x)\, dx$$

Di sini f(x) dan g(y) adalah fungsi sembarang.

KLASIFIKASI PERS DIF PARSIAL

The most general form of a second-order partial differential equation is

$$a(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} + g(x,y) = 0$$

Three types of equation are of particular interest because they feature so prominently in engineering and science.

Elliptic equations

If $b^2 - 4ac < 0$ the partial differential equation is called an *elliptic* equation. Such equations arise out of steady-state problems as occur in potential or flow theory. Two examples are

Poisson's equation

$$\frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial y^2} = g(x,y)$$

Laplace's equation

$$\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2}=0$$

In both cases $a=1$, $b=0$ and $c=1$ and so $b^2-4ac<-4$.

Hyperbolic equations

If $b^2-4ac>0$ the partial differential equation is called an *hyperbolic* equation. Such equations arise out of vibrational and radiative problems as occur in wave mechanics. An example is

The wave equation

$$\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}$$

Here $a=1$, $b=0$ and $c=-\dfrac{1}{\kappa^2}$ and so $b^2-4ac>0$.

Parabolic equations

If $b^2-4ac=0$ the partial differential equation is called a *parabolic* equation. Such equations arise out of transient flow problems as occur in conduction or consolidation. An example is

The consolidation (or heat conduction) equation

$$\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}$$

Here $a=1$, $b=0$ and $c=0$ and so $b^2-4ac=0$.

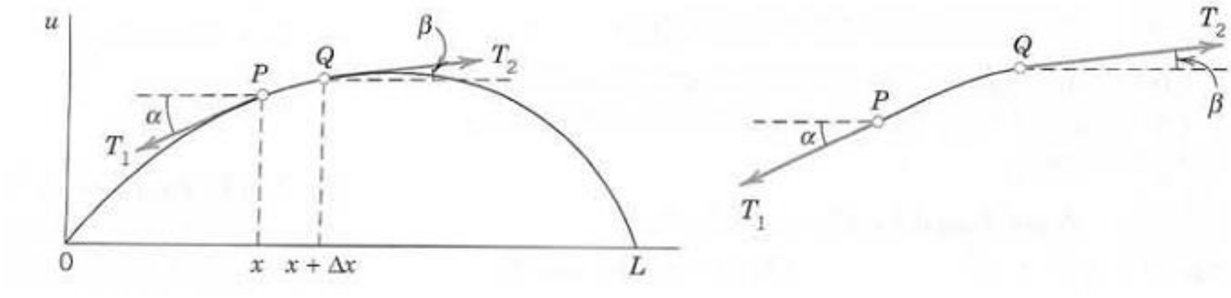
2.2. PEMODELAN: TALI BERGETAR, PERSAMAAN GELOMBANG

Salah satu model PDP yang penting adalah adalah model persamaan dari getaran transversal (melintang) tali/senar elastik. Tali ditempatkan sepanjang sumbu x, kencangkan sepanjang L, dan diikat mati di x=0 dan x=L. Tali ditarik sesaat (t=0) dan lepaskan serta biarkan tali bergetar. Persoalan yang timbul adalah untuk menentukan defleksi u(x,t) pada setiap titik di x dan pada setiap waktu t>0 (lihat gbr 2.1). u(x,t) akan menjadi penyelesaian PDP yang menjadi model yang dibentuk dari sistem fisik tersebut.

Asumsi:

1. Massa tali per satuan panjang konstan. Tali elastik sempurna.

2. Tegangan akibat pengencangan tali cukup besar, sehingga gaya gravitasi pada tali dapat diabaikan.
3. Tali mengalami gerakan transversal kecil pada arah vertikal, maka semua partikel dari tali bergerak/bergeser vertikal, sehingga defleksi dan slope pada setiap titik dari tali selalu tetap bernilai absolut kecil.



Gambar 2.1. Tali yang terdefleksi pada suatu saat t

Model dari tali yang bergetar akan terdiri dari PDP (berbentuk persamaan gelombang) dan syarat-syarat tambahan (syarat batas dan syarat awal). Untuk mendapatkan PDP, kita perthatikan gaya-gaya yang bekerja pada bagian kecil dari tali (gbr 2.1). Tegangan yang terjadi dalam arah tangensial terhadap kurva pada tali di setiap titik. Misalkan T_1 dan T_2 adalah tegangan pada titik P dan Q. Karena titik-titik pada tali bergerak vertikal, maka tidak ada gerakan dalam arah horisontal. Dengan demikian maka komponen horisontal dari tegangan haruslah konstan. Dengan menggunakan notasi pada gbr 2.1, kita dapatkan:

$$(1) \qquad T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T = const.$$

Pada arah vertikal, kita mempunyai dua gaya, yaitu $-T_1.\sin \alpha$ (komponen vertikal dari T_1) dan $T_2.\sin \beta$ (komponen vertikal dari T_2). Di sini ada tanda minus karena komponen pada P arahnya ke bawah. Dengan hukum kedua Newton, resultan dari kedua gaya tersebut sama dengan massa $\rho.\Delta x$ dari bagian kecil tersebut dikalikan percepatan $\partial^2 u/dt^2$, pada titik antara x dan x+Δx. Di sini ρ adalah massa dari tali yang tidak terdefleksi per satuan panjang, dan Δx adalah panjang bagian kecil dari tali yang tidak terdefleksi.

$$T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = \rho \, \Delta x \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Dari (1), kita dapat membaginya dengan $T_2.\cos \beta = T_1.\cos \alpha = T$, didapatkan:

$$(2) \qquad \frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_1 \cos \alpha} = \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho \, \Delta x}{T} \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Sekarang tan α dan tan β adalah *slope* dari tali pada x dan x+Δx

$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x} \qquad \text{and} \qquad \tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x+\Delta x}$$

Di sini kita harus menuliskan derivatif parsial, karena u tergantung juga pada t. Pers (2) dibagi dengan Δx, didapatkan:

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x}\right] = \frac{\rho}{T}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Jika Δx mendekati nol, kita mendapatkan PDP linier:

$$\textbf{(3)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

Persamaan ini disebut **persamaan gelombang satu dimensi**. Persamaan ini termasuk persamaan orde dua homogen. Konstanta T/ρ yang ditulis c^2 (bukan c) untuk menunjukkan bahwa konstanta tersebut positif. Disebut satu dimensi karena persamaan tersebut hanya melibatkan satu variabel ruang, yaitu x.

2.3. PENYELESAIAN DENGAN PEMISAHAN VARIABEL, MENGGUNAKAN DERET FOURIER

Model tali elastik yang bergetar berbentuk persamaan gelombang satu dimensi:

$$\textbf{(1)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

Karena tali diikat mati pada ujung-ujung x=0 dan x=L, kita mempunyai dua syarat batas:

$$\textbf{(2)} \qquad \text{(a)}\quad u(0, t) = 0, \qquad \text{(b)}\quad u(L, t) = 0 \qquad \text{for all } t.$$

Selanjutnya, bentuk dari gerakan tali akan tergantung pada defleksi awal (defleksi pada saat t=0), sebut saja f(x) dan pada kecepatan awal (kecepatan pada saat t=0), sebut saja g(x). Dengan demikian kita mempunyai dua syarat awal:

$$\textbf{(3)} \qquad \text{(a)}\quad u(x, 0) = f(x), \qquad \text{(b)}\quad u_t(x, 0) = g(x) \qquad (0 \leqq x \leqq L)$$

dengan $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$. Kita sekarang harus mencari penyelesaian PDP (1) yang memenuhi syarat batas (2) dan syarat awal (3). Untuk itu diperlukan 3 step.

Step 1. Dengan **"metode pemisahan variable"** atau ***"product method"***,

u(x,t)=F(x).G(t),

dari PDP (1) kita dapatkan 2 PDB, yaitu satu untuk F(x) dan satu yang lain untuk G(t).

Step 2. Kita selesaikan PDB yang memenuhi syarat batas (2)

Step 3. Akhirnya, dengan menggunakan Deret Fourier, kita membentuk penyelesaian yang didapatkan dari step 2 untuk mendapatkan penyelesaian PDP (1) yang memenuhi syarat batas (2) dan syarat awal (3). Itulah penyelesaian dari model kita yaitu tali yang bergetar.

STEP 1. DUA PDB DARI PERSAMAAN GELOMBANG (1)

Dalam metode pemisahan variabel, kita akan menentukan penyelesaian-penyelesaian dari persamaan gelombang (1) yang berbentuk:

$$u(x,t) = F(x)G(t) \tag{4}$$

Yang merupakan product dari dua fungsi, masing-masing tergantung pada satu variable saja yaitu x dan t.

Persamaan (4) didiferensialkan, dan didapatkan:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

Masukkan ke pers (1) didapatkan:

$$F\ddot{G} = c^2F''G.$$

Dibagi dengan c^2FG dan disederhanakan, menjadi:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F}.$$

Variabel- variabelnya sekarang terpisah, ruas kiri hanya tergantung pada t dan ruas kanan hanya tergantung pada x. Dengan demikian kedua ruas harus konstanta karena kalau variable, perubahan t atau x hanya akan mempengaruhi satu ruas. Dapat dituliskan:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = k.$$

Dikalikan dengan pembagi-pembaginya, akan didapatkan dengan cepat:

$$F'' - kF = 0 \tag{5}$$

and

$$\ddot{G} - c^2kG = 0. \tag{6}$$

Di sini konstanta pemisah k masih sembarang.

STEP 2. MEMASUKKAN SYARAT BATAS (2)

Sekarang kita menentukan penyelesaian F dan G dari pers (5) dan (6) sehingga u = FG yang memenuhi syarat batas (2),

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0, \qquad u(L, t) = F(L)G(t) = 0 \qquad \text{for all } t. \tag{7}$$

Pertama kali kita selesaikan pers (5). Jika $G \equiv 0$, kemudian $u = FG \equiv 0$, yang tidak mempunyai makna. Dengan demikian $G \neq 0$, dan kemudian dengan pers (7)

$$\text{(a)} \quad F(0) = 0, \qquad \text{(b)} \quad F(L) = 0. \tag{8}$$

Harga k harus negative (tidak nol dan tidak positif). Untuk k=0 penyelesaian umum dari pers (5) adalah F=ax+b, dan dari pers (8) kita dapatkan a=b=0, sehingga u=FG=0, ini tidak bermakna. Untuk k positif (misalnya $k=\mu^2$), penyelesaian umum dari pers (5) adalah:

$$F = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

Dan dari (8) kita dapatkan F=0 seperti sebelumnya. Dengan demikian kita pilih k negative, misalnya $k=-p^2$, kemudian (5) menjadi: F`` + p^2F = 0 dan mempunyai penyelesaian umum:

$$F(x) = A \cos px + B \sin px.$$

Dari pers ini dan (8)

$$F(0) = A = 0 \qquad \text{and then} \qquad F(L) = B \sin pL = 0.$$

Kita harus memberi harga B≠0, supaya F≠0, maka sin pL=0

$$(9) \qquad pL = n\pi, \qquad \text{so that} \qquad p = \frac{n\pi}{L} \qquad (n \text{ integer}).$$

B=1, maka kita mendapatkan banyak penyelesaian (tak tertentu) $F(x) = F_n(x)$.

$$(10) \qquad F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Solusi-solusi ini memenuhi pers (8).

Kita sekarang menyelesaikan pers (6) dengan $k = -p^2 = -(n\pi/L)^2$ yang dihasilkan dari (9),

$$(11^*) \qquad \ddot{G} + \lambda_n{}^2 G = 0 \qquad \text{where} \qquad \lambda_n = cp = \frac{cn\pi}{L}.$$

Penyelesaian umumnya adalah:

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n{}^* \sin \lambda_n t.$$

Penyelesaian pers (1) yang memenuhi syarat batas (2) adalah:

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = G_n(t)F_n(x).$$

Jika ditulis lengkap:

$$(11) \qquad u_n(x, t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n{}^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Fungsi-fungsi ini disebut ***eigenfunctions*** atau ***characteristic functions***, dan nilai $\lambda_n = cn\pi/L$ disebut ***eigenvalues*** atau ***characteristic values*** dari tali yang bergetar. Set $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ disebut ***spectrum***.

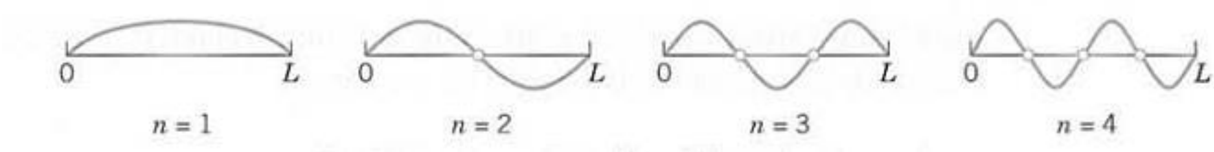
Diskusi tentang *eigenfunctions*

Kita mengetahui bahwa setiap u_n merepresentasikan gerakan harmonic yang mempunyai frekuensi $\lambda_n/2\pi = cn/2L$ siklus per satuan waktu. Gerakan ini disebut ***normal mode*** ke n dari tali. ***Normal mode*** yang pertama dikenal dengan nama ***fundamental mode*** (n=1), dan yang lainnya disebut ***overtones***, dalam music ini memberikan oktaf, *octave plus fifth*, dsb.

Karena dalam pers (11)

$$\sin\frac{n\pi x}{L} = 0 \qquad \text{at} \qquad x = \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}L,$$

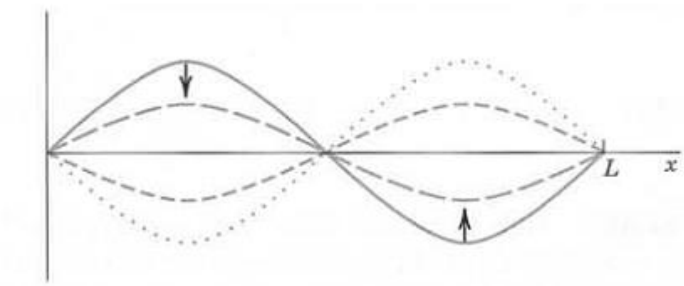
Normal mode ke n mempunyai n-1 ***nodes***, yaitu titik-titik pada tali yang tidak bergerak (in addition to the fixed endpoint), lihat gambar 2.2.



Gambar 2.2. mode normal dari tali yang bergetar

Gambar 2.3 menunjukkan mode normal kedua untuk berbagai nilai t. Pada suatu tali membentuk gelombang sinus. Pada saat bagian kiri dari tali bergerak ke bawah, separo yang lain bergerak ke atas, dan sebaliknya. Untuk mode-mode yang lain kondisinya mirip.

Tuning dilakukan dengan merubah tegangan T. Pers untuk frekuensi $\lambda_n/2\pi = cn/2L$ dari u_n dengan $c = \sqrt{T/\rho}$ mengkonfirmasi efeknya karena ini menunjukkan bahwa frekuensi proporsional terhadap tegangan *(tension)*.



Gambar 2.3. Mode normal kedua untuk berbagai nilai t

STEP 3. PENYELESAIAN DARI PERSOALAN, DENGAN DERET FOURIER

Eigenfunctions (11) memenuhi pers gelombang (1) dan syarat batas (2) (tali yang diikat mati pada ujungnya). Sebuah single u_n umumnya tidak memenuhi syarat awal (3). Akan tetapi, karena pers gelombang (1) adalah linier dan homogen, dengan mengikuti teorema 1 bahwa jumlah dari banyak penyelesaian u_n adalah penyelesaian dari pers (1). Untuk mendapatkan sebuah penyelesaian yang juga memenuhi syarat awal (3), kita perhatikan deret tak terhingga (dengan $\lambda_n = cn\pi/L$ seperti sebelumnya)

$$(12) \qquad u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos\lambda_n t+B_n^*\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x.$$

Dari pers (12) dan (3a) kita dapatkan

$$(13) \qquad u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\frac{n\pi}{L}x=f(x).$$

Selanjutnya kita harus memilih B_n sedemikian rupa sehingga u(x,0) menjadi ***Fourier sine series*** dari f(x).

$$(14) \qquad B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \qquad n=1,2,\cdots.$$

Memasukkan syarat awal (3b) (kecepatan awal).

Seperti sebelumnya, dengan mendiferensialkan pers (12) ke t dan menggunakan syarat awal (3b), kita dapatkan:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-B_n\lambda_n\sin\lambda_n t+B_n^*\lambda_n\cos\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{t=0}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} B_n^*\lambda_n\sin\frac{n\pi x}{L}=g(x).$$

Kita harus memilih B_n^* sedemikian rupa sehingga untuk t=0 derivatif $\partial u/\partial t$ menjadi ***Fourier sine series*** dari g(x).

$$B_n^*\lambda_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Karena $\lambda_n=cn\pi/L$, kita dapatkan:

$$(15) \qquad B_n^*=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n=1,2,\cdots.$$

Hasil

Diskusi kita menunjukkan bahwa u(x,t) yang diberikan oleh pers (12) dengan koefisien-koefisien (14) dan (15) adalah solusi dari pers (1) yang memenuhi syarat batas (2) dan syarat awal (3), dihasilkan deret (12) yang konvergen dan maka deret didapatkan dengan mendiferensialkan (12) dua kali yaitu ke x dan mempunyai jumlah $\partial^2 u/\partial x^2$ serta t dan mempunyai jumlah $\partial^2 u/\partial t^2$ yang kontinyu.

Berdasarkan derivasi kita penyelesaian (12) adalah ekspresi formal murni yang pertama, tetapi kita sekarang akan menetapkannya. Untuk penyederhanaan kita pertimbangkan kecepatan awal g(x) sama dengan nol. Kemudian Bn* sama dengan nol, dan (12) terreduksi menjadi:

$$\textbf{(16)} \qquad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

Ini memungkinkan untuk menjumlahkan deret ini, untuk menuliskan hasil dalam bentuk tertentu (finite form). Untuk tujuan ini kita gunakan pers (see (11) app A3.1 Kreyszig)

$$\cos \frac{cn\pi}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x = \frac{1}{2}\left[\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x - ct)\right\} + \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x + ct)\right\}\right].$$

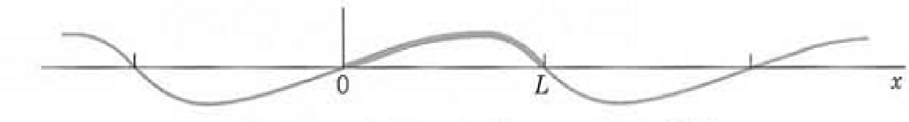
Konsekuensinya, kita dapat menuliskan (16) dalam bentuk

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x - ct)\right\} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x + ct)\right\}.$$

Dua deret ini adalah deret yang didapatkan dengan menggantikan x-ct dan x+ct, berturut-turut untuk variable x dalam Fourier sine series (13) untuk f(x), maka:

$$\textbf{(17)} \qquad u(x, t) = \tfrac{1}{2}[f^*(x - ct) + f^*(x + ct)]$$

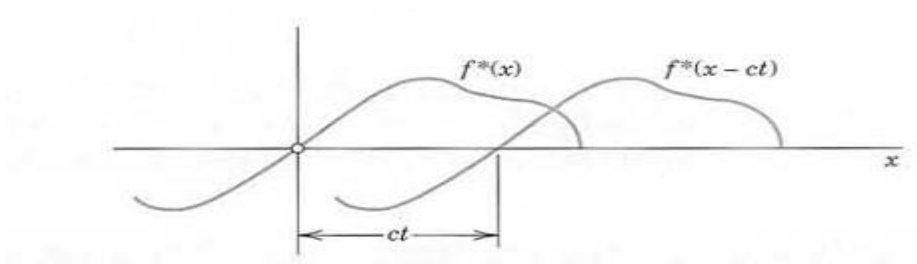
Dengan f* adalah ekstensi periodic fungsi ganjil dari f dengan periode 2L (gbr 2.4). Karena defleksi awal f(x) adalah kontinyu pada interval $0 \le x \le L$ dan nol pada titik ujung, mengikuti (17) bahwa u(x,t) adalah fungsi kontinyu dari kedua variable x dan t untuk semua harga dari variable-variabel tersebut. Dengan mendiferensialkan (17) kita mengetahui bahwa u(x,t) adalah solusi dari (1), yang menghasilkan f(x) dengan dua kali diferensial pada interval $0<x<L$, dan mempunyai satu ruas derivative orde dua pada x=0 dan x=L, yang bernilai nol. Dengan kondisi ini u(x,t) ditetapkan sebagai solusi dari (1) yang memenuhi syarat batas (2), syarat awal (3) dengan g(x)=0.



Gambar 2.4. Ekstensi periodic fungsi ganjil dari f(x)

Interpretasi fisik dari pers (17)

Grafik dari f*(x-ct) didapatkan dari grafik f(x) dengan menggeser ct satuan ke kanan (gbr 2.5). Ini berarti bahwa f*(x-ct) dengan (c>0) menggambarkan gelombang yang bergerak ke kanan dengan bertambahnya t. Demikian halnya dengan f*(x+ct) yang menggambarkan gelombang bergerak ke kiri, dan u(x,t) adalah superposisi dari dua gelombang tersebut.



Gambar 2.5. Interpretasi dari pers (17)

CONTOH SOAL 1A

Tentukan penyelesaian dari persamaan gelombang (1) jika defleksi awal *(initial deflection)* sbb:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2k}{L}x & \text{if} \quad 0<x<\dfrac{L}{2}\\[2mm] \dfrac{2k}{L}(L-x) & \text{if} \quad \dfrac{L}{2}<x<L\end{cases}$$

Dan kecepatan awal *(initial velocity)* g(x) = 0. Gambar 2.6 paling atas menunjukkan f(x)=u(x,0)

Penyelesaian:

Kita hitung B_n dengan persamaan (14)

$$\textbf{(14)} \qquad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, \cdots .$$

$$Bn = \frac{2}{L}\left[\int_0^{L/2} \frac{2k}{L}x.\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx + \int_{L/2}^{L} \frac{2k}{L}(L-x).\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right]$$

$$Bn = \frac{8k}{n^2\pi^2} . \sin\frac{n\pi}{2}$$

Selanjutnya kita hitung Bn* dengan persamaan (15)

$$\textbf{(15)} \qquad B_n{}^* = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Karena g(x)=0, maka Bn*=0

Bn dan Bn* masuk ke persamaan (12)

$$\textbf{(12)} \qquad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos\lambda_n t + B_n{}^* \sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x.$$

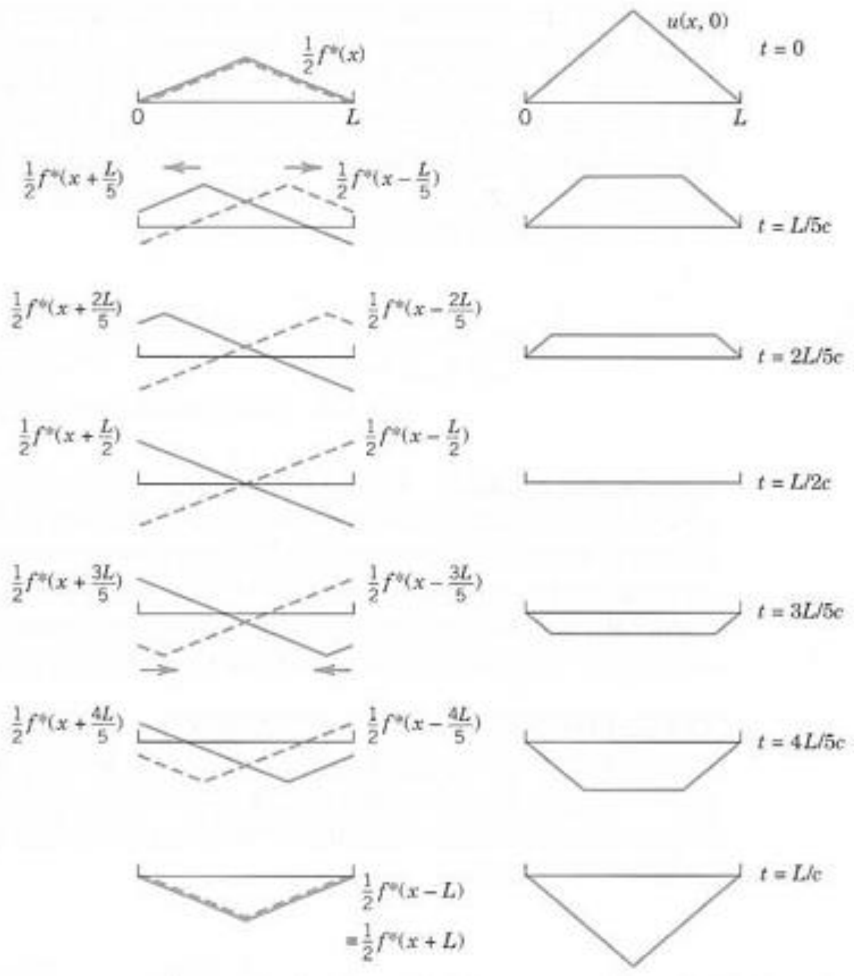
$\lambda_n=(cn\pi)/L$, maka didapatkan

$$u(x,t) = \frac{8k}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi c}{L}t - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{L}x\cos\frac{3\pi c}{L}t + - \cdots\right]$$

Untuk menggambarkan penyelesaian ini dalam bentuk grafik, kita dapat menggunakan u(x,0)=f(x) dan interpretasi diatas dari dua fungsi pada persamaan (17)

$$\textbf{(17)} \qquad u(x,t) = \tfrac{1}{2}[f^*(x-ct) + f^*(x+ct)]$$

Hasilnya ditunjukkan pada gambar di bawah ini



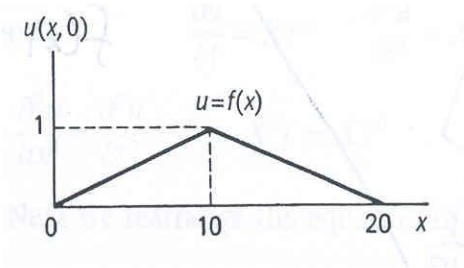
Gambar 2.6.

Penyelesaian u(x,t) dari contoh soal 1A untuk berbagai harga t (gambar sebelah kanan) yang didapatkan dengan superposisi dari pergerakan gelombang ke arah kanan (garis putus-putus) dan pergerakan gelombang ke kiri.

CONTOH SOAL 1 B

Sebuah tali (string) yang dikencangkan dengan panjang 20 cm. Tali tersebut ditarik sejauh 1 cm dari posisi semula pada tengah-tengah (seperti gambar di bawah) kemudian dilepaskan dengan kecepatan awal sama dengan nol, dan kemudian berosilasi.

Selesaikan persamaan gelombang $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ dengan c^2 =1 untuk mendapatkan persamaan gerakan u(x,t).

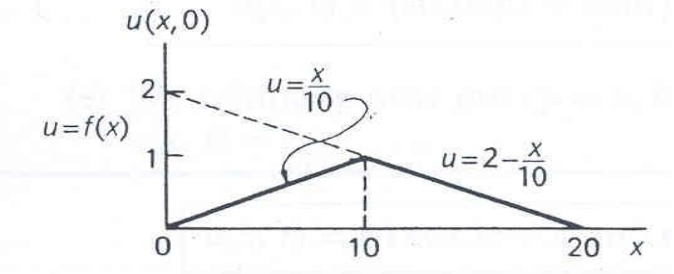


Gambar 2.7. Ilustrasi tali pada contoh soal 1 B

Penyelesaian:

Pertama, kita menentukan syarat batas dari data yang diberikan pada soal

$$
\begin{aligned}
&u(0,t)=0; \qquad u(20,t)=0 \quad \text{(fixed end points)}\\
&u(x,0)=f(x)=\frac{x}{10} \qquad 0\le x\le 10\\
&\qquad\qquad\quad =\frac{20-x}{10} \quad 10\le x\le 20\\
&\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0}=0 \qquad \text{(zero initial velocity)}
\end{aligned}
$$



Gambar 2.8. Kondisi tali pada t=0, u(x,0)=f(x)

(a). Asumsikan bahwa u=X.T, dengan X fungsi x saja dan T fungsi t saja. Kemudian persamaan gelombang $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (karena c=1), menjadi $X''T = XT''$, karena:

$$
u=XT \qquad \therefore\ \frac{\partial u}{\partial x}=X'T \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''T
$$

$$
\text{and} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=XT' \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=XT''
$$

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \therefore\ X''T=XT''
$$

(b). Selanjutnya dilakukan pemisahan variable, didapatkan:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T}$$

(c). Karena kedua ruas sama untuk semua harga dari variabel, maka masing-masing harus sama dengan konstanta k, dan agar terjadi osilasi maka harus diberikan harga k negative, yaitu k= - p^2.

Kedua persamaan yang terpisah tersebut dapat dituliskan:

$X'' + p^2X = 0$ dan $T'' + p^2T = 0$

(d). Solusi dari kedua persamaan ini adalah:

$$\boxed{\begin{array}{c} X = A\cos px + B\sin px; \quad T = C\cos pt + D\sin pt \\ \therefore\ u(x,\, t) = \{A\cos px + B\sin px\}\{C\cos pt + D\sin pt\} \end{array}}$$

(e). Kita biasanya menuliskan cp=λ, tetapi c=1, maka p= λ dan

u(x,t)= {Acosλx+Bsinλx}.{Ccosλt+Dsinλt}

(f). Sekarang kita menghitung A dan B dari syarat batas

(1) $u(0,\, t) = 0 \quad \therefore\ 0 = A(C\cos\lambda t + D\sin\lambda t) \quad \therefore\ A = 0$

$\therefore\ u(x,\, t) = B\sin\lambda x(C\cos\lambda t + D\sin\lambda t)$

(2) $u(20,\, t) = 0 \quad \therefore\ 0 = B\sin 20\lambda(C\cos\lambda t + D\sin\lambda t)$

$B \neq 0$ maka haruslah sin 20λ = 0

$$\therefore\ 20\lambda = n\pi \quad \therefore\ \lambda = \frac{n\pi}{20}$$

$$\therefore\ u(x,\, t) = \sin\frac{n\pi}{20}x\left\{P\cos\frac{n\pi}{20}t + Q\sin\frac{n\pi}{20}t\right\}$$

dengan P = B.C dan Q = B.D

(g). Langkah berikutnya adalah membuat tabel *eigenvalues* dan *eigenfunctions*

The next step is to list the eigenvalues and eigenfunctions.

	Eigenvalues	Eigenfunctions
n	$\lambda = \frac{n\pi}{20}$	$u(x,t) = \sin \lambda x\{P\cos \lambda t + Q \sin \lambda t\}$
1	$\lambda_1 = \frac{\pi}{20}$	$u_1 = \sin\frac{\pi x}{20}\left\{P_1 \cos\frac{\pi t}{20} + Q_1 \sin\frac{\pi t}{20}\right\}$
2	$\lambda_2 = \frac{2\pi}{20}$	$u_2 = \sin\frac{2\pi x}{20}\left\{P_2 \cos\frac{2\pi t}{20} + Q_2 \sin\frac{2\pi t}{20}\right\}$
3	$\lambda_3 = \frac{3\pi}{20}$	$u_3 = \sin\frac{3\pi x}{20}\left\{P_3 \cos\frac{3\pi t}{20} + Q_3 \sin\frac{3\pi t}{20}\right\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	$\lambda_r = \frac{r\pi}{20}$	$u_r = \sin\frac{r\pi x}{20}\left\{P_r \cos\frac{r\pi t}{20} + Q_r \sin\frac{r\pi t}{20}\right\}$

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \quad \therefore\ u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sin\frac{r\pi x}{20}\left\{P_r \cos\frac{r\pi t}{20} + Q_r \sin\frac{r\pi t}{20}\right\}$$

(h). Sekarang kita masukkan syarat awalnya

$$\begin{aligned}(1)\quad u(x,0) = f(x) &= \frac{x}{10} && 0 \le x \le 10\\ &= \frac{20-x}{10} && 10 \le x \le 20\end{aligned}$$

$$\boxed{u(x,0) = \sum_{r=1}^{\infty} P_r \sin\frac{r\pi x}{20}}$$

Kemudian P_r = 2 x rata rata nilai $f(x)\sin\frac{r\pi x}{20}$ antara x=0 dan x=20

$$= \frac{2}{20}\int_0^{20} f(x)\ \sin\ \frac{r\pi x}{20}\,dx$$

$$\begin{aligned}10P_r &= \int_0^{10} \frac{x}{10}\ \sin\ \frac{r\pi x}{20}\,dx + \int_{10}^{20} \frac{20-x}{10} \sin\frac{r\pi x}{20}\,dx\\ &= \qquad I_1 \qquad\qquad + \qquad I_2\end{aligned}$$

$$I_1 = \int_0^{10} \frac{x}{10} \sin \frac{r\pi x}{20} \, dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\boxed{I_1 = -\frac{20}{r\pi} \cos \frac{r\pi}{2} + \frac{40}{r^2\pi^2} \sin \frac{r\pi}{2}}$$

$$I_2 = \int_{10}^{20} \frac{20 - x}{10} \sin \frac{r\pi x}{20} \, dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I_2 = \frac{20}{r\pi} \, Cos \, \frac{r\pi}{2} + \frac{40}{r^2\pi^2} \, Sin \, \frac{r\pi}{2}$$

$$10 \, P_r = -\frac{20}{r\pi} \, Cos \, \frac{r\pi}{2} + \frac{40}{r^2\pi^2} \, Sin \, \frac{r\pi}{2} + \frac{20}{r\pi} \, Cos \, \frac{r\pi}{2} + \frac{40}{r^2\pi^2} \, Sin \, \frac{r\pi}{2}$$

$$10 \, P_r = \frac{80}{r^2\pi^2} \, Sin \, \frac{r\pi}{2}$$

$$P_r = \frac{8}{r^2\pi^2} \, Sin \, \frac{r\pi}{2}$$

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} Sin \, \frac{r\pi x}{20} \left\{ \frac{8}{r^2\pi^2} \, Sin \, \frac{r\pi}{2} \, Cos \, \frac{r\pi t}{20} + Q_r Sin \, \frac{r\pi t}{20} \right\}$$

(2) Juga pada t = 0 ; $\quad \boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial t} = 0}$

$$\frac{\partial_u}{\partial_t} = \sum_{r=1}^{\infty} Sin \, \frac{r\pi x}{20} \left\{ \left(\frac{8}{r^2\pi^2} \, Sin \, \frac{r\pi}{2} \right) \left(-\frac{r\pi}{20} \, Sin \, \frac{r\pi t}{20} \right) + Q_r \, \frac{r\pi}{20} Cos \, \frac{r\pi t}{20} \right\}$$

$$\text{At } t = 0, \qquad 0 = \sum_{r=1}^{\infty} \sin \frac{r\pi x}{20} Q_r \frac{r\pi}{20} \qquad \therefore \; Q_r = 0$$

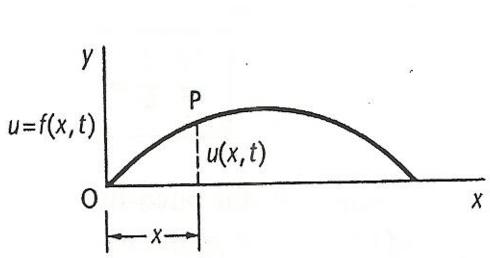
Dan akhirnya kita dapatkan:

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}\, Sin\frac{r\pi x}{20}\, Sin\,\frac{r\pi}{2}\, Cos\,\frac{r\pi t}{20}$$

2.4. Persamaan konduksi kalor pada batang tertentu yang seragam *(The heat conduction equation for a uniform finite bar)*

Konduksi kalor dalam batang yang seragam (uniform) tergantung pada distribusi awal dari temperature dan pada sifat-sifat fisik dari batang, misalnya konduktivitas termal, kalor spesifik dari material dan massa per satuan panjang dari batang.

Dengan batang seragam yang diisolasi kecuali pada ujung-ujungnya, aliran kalor sepanjang batang dan pada waktu sesaat temperature u pada titik P adalah fungsi dari jaraknya dari satu ujung dan waktu t.



(1)

Pesamaan kalor satu dimensi kemudian berbentuk:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}$$

dengan: $c^2 = \frac{k}{\sigma\rho}$; k = konduktivitas termal material, σ = kalor spesifik material dan ρ = massa per satuan panjang dari batang.

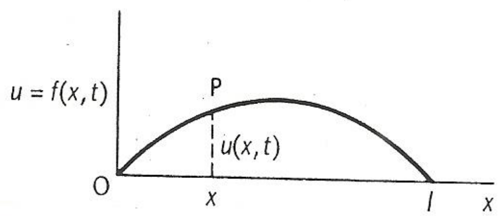
Penyelesaian persamaan konduksi kalor

Asumsi:

(a). batang sepanjang l dari x=0 sampai x=l

(b). temperature dari ujung-ujung batang dipertahankan sama dengan nol.

(c). distribusi temperature awal sepanjang batang dinyatakan dengan f(x)



Syarat batas dapat dinyatakan dengan:

$$u(0,t)=0 \quad \text{and} \quad u(l,t)=0 \quad \text{for all } t \geq 0$$
$$u(x,0)=f(x) \quad \text{for} \quad 0 \leq x \leq l$$

Seperti sebelumnya, kita asumsikan bahwa penyelesaiannya berbentuk:

U(x,t) = X(x) . T(t)

Kemudian, dimulai dengan u=X.T kita dapat menuliskan persamaan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

Dalam bentuk X dan T, dan selanjutnya dengan pemisahan variable, kita dapatkan:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{T'}{T}$$

Seperti sebelumnya, kedua ruas dalam persamaan ini sama dengan k, dan k = - p^2

$$\therefore \frac{X''}{X} = -p^2 \quad \therefore X'' + p^2 X = 0 \text{ giving } X = A\cos px + B\sin px$$

$$\text{and } \frac{1}{c^2} \cdot \frac{T'}{T} = -p^2 \quad \therefore T' + p^2 c^2 T = 0 \text{ giving } T = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T = Ce^{-p^2 c^2 t}$$

Karena:

$$\frac{T'}{T} = -p^2c^2 \quad \therefore \quad \ln T = -p^2c^2t + c_1 \quad \therefore \quad T = Ce^{-p^2c^2t}$$

$$u(x,t) = XT = \{A\cos px + B\sin px\}\, Ce^{-p^2c^2t}$$

$$\therefore \quad u(x,t) = \{P\cos px + Q\sin px\}e^{-p^2c^2t} \qquad \text{where } P = AC \text{ and } Q = BC$$

Now put $pc = \lambda \quad \therefore \quad p = \dfrac{\lambda}{c}$

$$\therefore \quad u(x,t) = \left\{P\cos\frac{\lambda}{c}x + Q\sin\frac{\lambda}{c}x\right\}e^{-\lambda^2 t}$$

$$P = 0 \text{ and } u(x,t) = Qe^{-\lambda^2 t}\sin\frac{\lambda}{c}x$$

Juga u(l,t) = 0, dan dari persamaan ini kita peroleh:

$$\lambda = \frac{nc\pi}{l} \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Karena:

if $u = 0$ when $x = l$, $\qquad 0 = Qe^{-\lambda^2 t}\sin\dfrac{\lambda l}{c}$

$Q \neq 0$ or $u(x,t)$ would be identically zero $\therefore \quad \sin\dfrac{\lambda l}{c} = 0$

$$\therefore \quad \frac{\lambda l}{c} = n\pi \qquad \therefore \quad \lambda = \frac{nc\pi}{l} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Sekarang kita dapatkan tabel *“eigenfunction”*:

n	$\lambda = \frac{nc\pi}{l}$	$u(x,t) = Qe^{-\lambda^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}$
1	$\lambda_1 = \frac{c\pi}{l}$	$u_1 = Q_1 e^{-\lambda_1^2 t} \sin \frac{\pi x}{l}$
2	$\lambda_2 = \frac{2c\pi}{l}$	$u_2 = Q_2 e^{-\lambda_2^2 t} \sin \frac{2\pi x}{l}$
3	$\lambda_3 = \frac{3c\pi}{l}$	$u_3 = Q_3\, e^{-\lambda_3^2 t} \sin \frac{3\pi x}{l}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	$\lambda_r = \frac{rc\pi}{l}$	$u_r = Q_r\, e^{-\lambda_r^2 t} \sin \frac{r\pi x}{l}$

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$$\therefore\ u(x,\, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ Q_r\, e^{-\lambda_r^2 t} \sin \frac{r\pi x}{l} \right\}$$

Dari syarat awal t=0, u(x,0) = f(x) ; $0 \le x \le 1$ didapatkan:

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ Q_r \sin \frac{r\pi x}{l} \right\}$$

Dari teknik deret Fourier:

$$Q_r = 2 \times \text{mean value of } f(x) \sin \frac{r\pi x}{l} \text{ from } x = 0 \text{ to } x = l$$

$$\therefore\ Q_r = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{r\pi x}{l}\, dx \text{ and the final solution becomes}$$

$$u(x,t) = \frac{2}{l} \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \left[\int_0^l f(w) \sin \frac{r\pi w}{l}\, dw \right] e^{-\lambda_r^2 t} \sin \frac{r\pi x}{l} \right\}$$

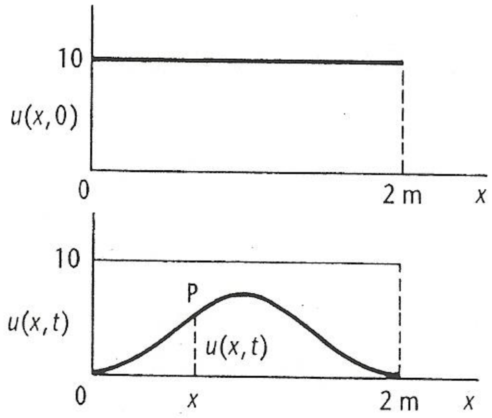
dengan:

$$\lambda_r = \frac{rc\pi}{l} \qquad r = 1, 2, 3, \dots$$

CONTOH SOAL 2

Sebuah batang dengan panjang 2 m diisolasi sepenuhnya sepanjang kelilingnya. Temperatur awal seragam pada 10 °C dan pada t=0 ujung-

ujungnya ditempel es sehingga temperaturnya dipertahankan sama dengan 0 ^{o}C. Tentukan temperature pada titik P yang berjarak x dari salah satu ujung dan pada t detik, setelah t=0.



Penyelesaian:

Kita mempunyai persamaan kalor:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

dengan syarat batas:

$$u(0,\ t) = 0; \quad u(2,\ t) = 0; \quad u(x,\ 0) = 10$$

Asumsikan penyelesaian berbentuk: u=X.T, kita mengetahui bahwa ini menghasilkan persamaan:

$$X = A\cos px + B\sin px$$
$$T = Ce^{-p^2c^2t}$$

Maka penyelesaian umum berbentuk:

$$u(x,t) = \{P\cos px + Q\sin px\}e^{-p^2c^2t}$$

Jika kita tuliskan

$$pc = \lambda, \quad p = \frac{\lambda}{c}$$

Penyelesaian menjadi:

$$u(x,t) = \left\{ P\cos\frac{\lambda}{c}x + Q\sin\frac{\lambda}{c}x \right\} e^{-\lambda^2 t}$$

dengan menggunakan dua syarat batas pertama, kita dapatkan:

$$P = 0 \quad \text{and} \quad u(x,t) = \left\{ Q\sin\frac{n\pi x}{2} \right\} e^{-\lambda^2 t}$$

karena:

$$u(0,\,t) = 0 \quad \therefore\; 0 = Pe^{-\lambda^2 t} \quad \therefore\; P = 0$$

$$\therefore\; u(x,\,t) = \left\{ Q\sin\frac{\lambda}{c}x \right\} e^{-\lambda^2 t}$$

$$\text{Also } u(2,\,t) = 0 \qquad \therefore\; 0 = \left\{ Q\sin\frac{2\lambda}{c} \right\} e^{-\lambda^2 t}$$

$$Q \neq 0 \qquad \therefore\; \sin\frac{2\lambda}{c} = 0 \quad \therefore\; \frac{2\lambda}{c} = n\pi \quad \therefore\; \lambda = \frac{nc\pi}{2} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\therefore\; u(x,\,t) = \left\{ Q\sin\frac{n\pi x}{2} \right\} e^{-\lambda^2 t}$$

Oleh karena itu tentu saja ada sejumlah tak terhingga penyelesaian dengan n yang berbeda. Kita dapat menuliskan penyelesaiannya sbb:

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} Q_r \sin\frac{r\pi x}{2} e^{-\lambda_r^2 t}$$

Dengan syarat awal

$$\therefore\; u(x,0) = f(x) = 10 \quad \therefore\; 10 = \sum_{r=1}^{\infty} Q_r \sin\frac{r\pi x}{2}$$

$$\text{where } Q_r = 2 \times \text{mean value of } 10\,\sin\frac{r\pi x}{2} \text{ from } x = 0 \text{ to } x = 2.$$

$$\therefore\; Q_r = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Qr = 0 (r even); $\frac{40}{2\pi}$ **(r odd)**

Karena:

$$Q_r = \frac{2}{2}\int_0^2 10\sin\frac{r\pi x}{20}dx = 10\int_0^2 \sin\frac{r\pi x}{2}dx$$
$$= -\frac{20}{\pi r}\left[\cos\frac{r\pi x}{2}\right]_0^2 = \frac{20}{\pi r}\{1-\cos r\pi\}$$
$$= 0 \text{ (r even) and } \frac{40}{r\pi} \text{ (r odd)}$$

Therefore the required solution is

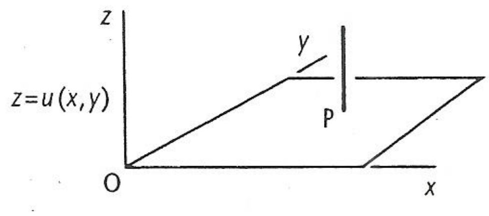
$$u(x, t) = \dots\dots\dots\dots$$

$$u(x, t) = \frac{40}{\pi}\sum_{r\,(\text{odd})=1}^{\infty} \frac{1}{r}\sin\frac{r\pi x}{2}e^{-\lambda_r^2 t} \qquad r = 1, 3, 5, \dots$$

where $\lambda_r = \dfrac{rc\pi}{2}$

2.5.Persamaan Laplace

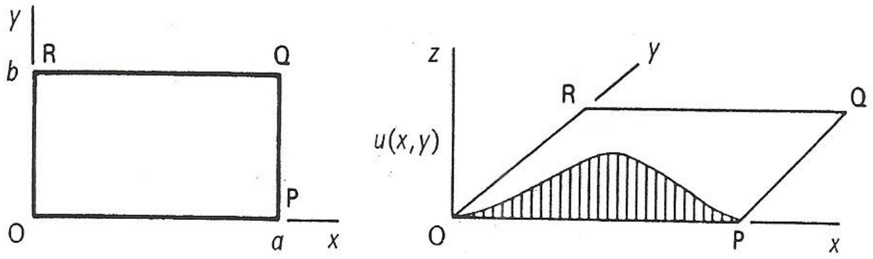
Persamaan Laplace menunjukkan distribusi dari suatu medan (misalnya medan temperature, medan potensial, dsb) pada suatu bidang dengan syarat batas tertentu.



Potensial pada titik P dalam bidang dapat dinyatakan dengan sumbu koordinat dan merupakan fungsi dari posisinya, misalnya z = u(x,y); dengan u(x,y) adalah penyelesaian dari persamaan Laplace dua dimensi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Penyelesaian Persamaan Laplace



Kita akan mencari penyelesaian persamaan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

dari suatu bidang segi empat yang dibatasi oleh garis x=0, y=0, x=a, y=b dengan kondisi atau syarat batas sbb:

u = 0	pada x = 0	;	$0 \leq y \leq b$
u = 0	pada x = a	;	$0 \leq y \leq b$
u = 0	pada y = b	;	$0 \leq x \leq a$
u = f(x)	pada y = 0	;	$0 \leq x \leq a$

atau dapat juga dinyatakan dengan

u(0,y) = 0 dan u(a,y) = 0 untuk $0 \leq y \leq b$, dan

u(x,b) = 0 dan u(x,0) = f(x) untuk $0 \leq x \leq a$

Penyelesaian dari z=u(x,y) akan menunjukkan potensial pada setiap titik di dalam segi empat OPQR.

Seperti biasanya, kita mulai dengan mengasumsikan penyelesaiannya berbentuk u(x,y) = X(x).T(t) dengan X fungsi x saja dan T fungsi dari t saja. Dengan metode pemisahan variable, kita dapatkan:

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}$$

karena

$$u = XY \qquad \therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} = X'Y \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = XY' \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''$$

The equation is then $X''Y = -XY''$ $\quad \therefore \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$

Dengan memberikan harga setiap ruas sama dengan k = $-p^2$, didapatkan dua persamaan:

$$X'' + p^2X = 0 \quad \text{and} \quad Y'' - p^2Y = 0$$

$X'' + p^2X = 0$ has a solution $X = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$X = A\cos px + B\sin px$$

Di depan telah ditunjukkan bahwa persamaan Y"-p^2Y = 0 mempunyai penyelesaian yang berbentuk: **Y = C cosh py + D sinh py** yang dapat juga dinyatakan dengan Y = E sinh p (y+ϕ). ϕ adalah konstanta sembarang (lht Stroud hal 415)

Jadi:

u(x,y) = {A cos px + B sin px}. E sinh p (y+ϕ)

u(x,y) = {P cos px + Q sin px}. sinh p (y+ϕ)

Sekarang kita masukkan syarat batas pertama

u(0,y)=0 maka 0 = P sinh p(y+ϕ) jadi P = 0

jadi u(x,y) = Q sin px. sinh p (y+ϕ)

Dari syarat batas kedua

u(a,y) = 0 maka 0 = Q.sin pa. sinh p(y+ϕ); jadi sin pa =0

pa = nπ untuk n = 1,2,3,...

Jika kita menuliskan λ = p kemudian λ = (nπ)/a dan

U(x,y) = Q sin λx.sinh λ(y+ϕ)

Selanjutnya dengan syarat batas ketiga u(x,b) = 0

$$u(x, y) = Q \sin \lambda x \sinh \lambda(b - y)$$

karena:

$$0 = Q \sin \lambda x \sinh \lambda(b + \phi) \quad \therefore \quad \sinh \lambda(b + \phi) = 0 \quad \therefore \quad \phi = -b.$$
$$\therefore \quad u(x, y) = Q \sin \lambda x \sinh \lambda(y - b)$$
$$\sinh \lambda(y - b) = -\sinh \lambda(b - y) \quad \therefore \quad u(x, y) = Q \sin \lambda x \sinh \lambda(b - y),$$

Sekarang λ = (nπ)/a dengan n=1,2,3,... dan oleh karena itu ada sejumlah tak terhingga harga λ dan sejumlah tak terhingga penyelesaian untuk u(x,y).

$$\boxed{u(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} Q_r \sin \lambda_r x \sinh \lambda_r (b - y)}$$

Sekarang kita masukkan syarat batas yang ke-empat:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \therefore \quad f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} Q_r \sin \lambda_r x \ \sinh \ \lambda_r b$$
$$\therefore \quad Q_r \sinh \lambda_r b = 2 \times \text{ mean value of } f(x) \sin \lambda_r x \text{ from } x = 0 \text{ to } x = a$$
$$= \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \lambda_r x \, dx$$
$$= \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{r\pi x}{a} dx$$

Dari sini harga koefisien Qr dapat ditentukan.

Contoh:

Tentukan penyelesaian u(x,t) dari persamaan Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Dengan syarat batas: u = 0 pada x = 0 ; u = 0 pada x = π

u → 0 pada y = ∞ ; u = 3 pada y = 0

Penyelesaian:

Kita mulai dengan u(x,y) = X(x).Y(y). Dengan pemisahan variable kita dapatkan:

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}$$

Kedua ruas disamakan dengan $-p^2$, akan kita dapatkan dua persamaan diferensial biasa, yaitu: **$X'' + p^2X = 0$** dan **$Y'' - p^2Y = 0$**.

Penyelesaian dari $X'' + p^2X = 0$ adalah:

$$X = A\cos px + B\sin px$$

Penyelesaian persamaan $\boldsymbol{Y'' - p^2 Y = 0}$ dapat dinyatakan dalam tiga bentuk, yaitu:

$Y = C\cosh py + D\sinh py$; $Y = C.e^{py} + D.e^{-py}$; $Y = C\sinh p(y+\phi)$

Untuk kali ini kita gunakan bentuk yang kedua: **$Y = C.e^{py} + D.e^{-py}$**

Kemudian **$u(x,y) = \{A.\cos px + B.\sin px\}.\{C.e^{py} + D.e^{-py}\}$**

Dengan memasukkan syarat batas pertama u(0,y)=0, didapatkan

$$A = 0 \text{ and } u(x,y) = \sin px\{Pe^{py} + Qe^{-py}\}$$

karena

$$0 = A\{Ce^{py} + De^{-py}\} \qquad \therefore\ A = 0$$
$$\text{and } u(x, y) = B \sin px\{Ce^{py} + De^{-py}\} = \sin px\{Pe^{py} + Qe^{-py}\}.$$

Syarat batas kedua $u(\pi,y) = 0$ menghasilkan

$$u(x, y) = \sin nx\ \{Pe^{ny} + Qe^{-ny}\} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Karena

u = 0 pada $x = \pi$; jadi $\mathbf{0 = \sin p\pi\{Pe^{py} + Qe^{-py}\}}$

Sin $p\pi = 0$; $p\pi = n\pi$; p=n , n=1,2,3,....

$$u(x,y) = \sin nx\{Pe^{ny} + Qe^{-ny}\}$$

Syarat batas ketiga, yaitu: u → 0 pada y = ∞ karena e^{-ny} → 0

y = 0 kemudian $0 = \sin nx.\{P.e^{ny}\}$, maka didapatkan P = 0

Jadi $u(x,y) = Q.e^{-ny}.\sin nx$

n dapat mempunyai nilai sampai dengan tak terhingga, sehingga akan ada sejumlah tak terhingga penyelesaian

$$\begin{aligned} u_1 &= Q_1e^{-y}\sin x \\ u_2 &= Q_2e^{-2y}\sin 2x \\ u_3 &= Q_3e^{-3y}\sin 3x \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ u_r &= Q_re^{-ry}\sin rx \end{aligned}$$

Dengan demikian penyelesaiannya dapat dinyatakan dengan:

$$u(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} Q_re^{-ry}\sin rx$$

Sekarang kita masukkan syarat batas terakhir yaitu u = 3 pada y = 0

$$3 = \sum_{r=1}^{\infty} Q_r.\sin rx$$

Ini menghasilkan:

$$Q_r = 0 \ (r \text{ even}); \quad Q_r = \frac{12}{r\pi} (r \text{ odd})$$

karena

$$Q_r = 2 \times \text{ mean value of } 3 \sin rx \text{ between } x = 0 \text{ and } x = \pi$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 3 \sin rx \, dx = \frac{6}{\pi} \left[-\frac{\cos rx}{r} \right]_0^{\pi} = \frac{6}{r\pi} (1 - \cos r\pi)$$
$$\therefore \ Q_r = 0 \ (r \text{ even}) \text{ and } \frac{12}{r\pi} \ (r \text{ odd})$$
$$\therefore \ u(x, y) = \sum_{r \, (\text{odd})=1}^{\infty} \frac{12}{r\pi} e^{-ry} \sin rx \qquad r = 1, 3, 5, \ldots$$
$$\therefore \ u(x, y) = \frac{12}{\pi} \left\{ e^{-y} \sin x + \frac{1}{3} e^{-3y} \sin 3x + \frac{1}{5} e^{-5y} \sin 5x + \ldots \right\}$$

2.5. Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Secara Numeris.

Perkiraan secara numeric dari suatu turunan

Fungsi dengan satu variable f(x) mempunyai ekspansi deret Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \ldots$$

and, equally, replacing h by $-h$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \ldots$$

Dari persamaan pertama di atas, dengan membaginya dengan h, didapatkan:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2!} f''(x) + \frac{h^2}{3!} f'''(x) + \ldots$$

and from the second equation

$$\frac{f(x-h) - f(x)}{h} = -f'(x) + \frac{h}{2!} f''(x) - \frac{h^2}{3!} f'''(x) + \ldots$$

Jika turunan orde dua atau lebih diabaikan, If we now neglect terms of the order two and higher we see that

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ [this is the *forward difference formula* for the first derivative of $f(x)$]

and

$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$ [this is the *backward difference formula* for the first derivative of $f(x)$]

Dari dua persamaan ini didapatkan:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

karena

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x-h) &= \left(f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\dots\right) \\ &\quad -\left(f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\dots\right) \\ &= 2\left(hf'(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\dots\right) \end{aligned}$$

maka

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x)+\frac{h^2}{3!}f'''(x)+\dots$$

giving

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

neglecting terms of the order two and higher.

Ini disebut ***central difference formula*** untuk turunan dari f(x).

Selanjutnya kita akan melihat pada turunan ke dua. Dengan menambahkan dua ekspansi deret Taylor pertama di atas, didapatkan:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

neglecting terms of the order two and higher

karena

$$\begin{aligned} f(x+h) + f(x-h) &= \left(f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots \right) \\ &\quad + \left(f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots \right) \\ &= 2\left(f(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{iv}(x) + \dots \right) \\ &= 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12}f^{iv}(x) + \dots \end{aligned}$$

dan

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{h^2}{12}f^{iv}(x) + \dots$$

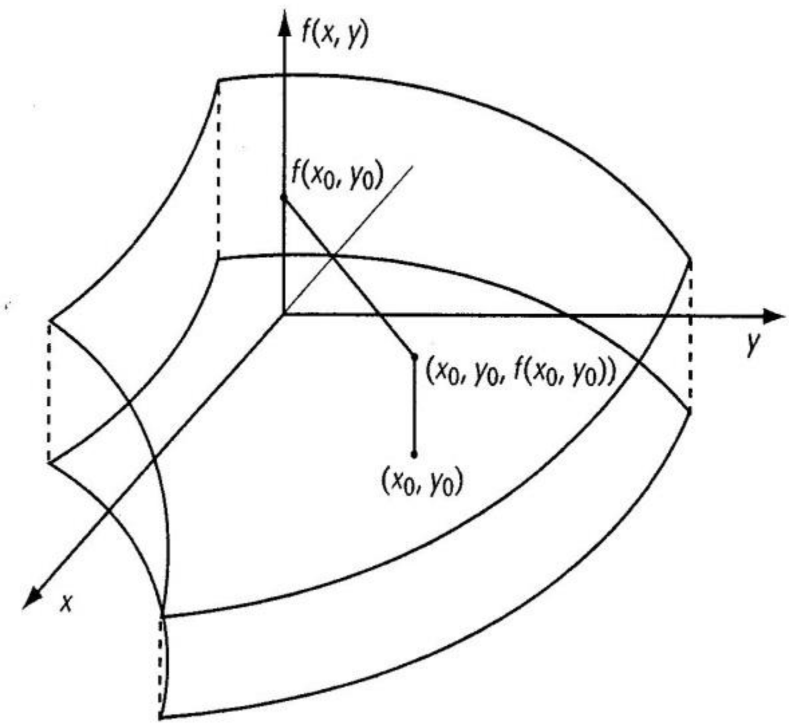
Therefore

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$ neglecting terms of the order two and higher

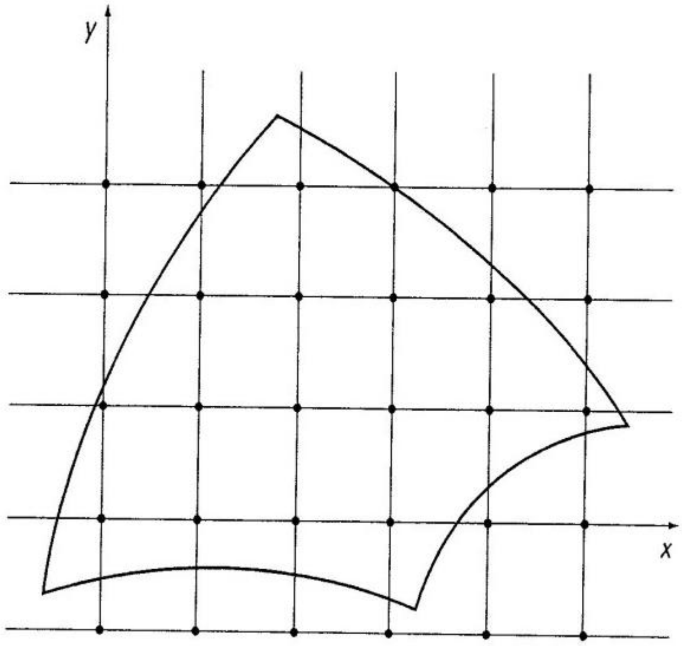
Ini disebut ***central difference formula*** untuk turunan ke dua dari f(x)

Fungsi dengan dua variable

Fungsi dengan dua variable f(x,y) ditunjukkan secara grafis dengan permukaan dalam ruang tiga dimensi.



Jika f(x,y) bernilai tunggal dan kemudian setiap titik domain (x,y) berhubungan dengan satu *range point* f(x,y) dan menjadi satu titik bidang (x, y, f(x,y)). Jika kita mengetahui bentuk dari f(x,y) ,kita dapat menghitung harganya pada setiap titik (x,y). Jika kita tidak mengetahui bentuk dari f(x,y) tetapi kita mengetahui bahwa ini memenuhi persamaan diferensial yang diberikan, kemudian kita dapat mengevaluasi f(x,y) secara numeric dan harus lebih sistematik.



Harga Grid

Harga f(x,y) pada titik grid ke ij adalah

$$f_{i,j} \equiv f(ih, jk)$$

Harga f(x,y) perlu didapatkan pada titik grid seperti ditunjukkan sbb:

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & f_{i-1,j+1} & f_{i,j+1} & f_{i+1,j+1} & \cdots \\
\cdots & f_{i-1,j} & f_{i,j} & f_{i+1,j} & \cdots \\
\cdots & f_{i-1,j-1} & f_{i,j-1} & f_{i+1,j-1} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{ij}$ *is equal to the difference between the two adjacent values of $f(x,y)$ in the x-direction divided by twice the mesh size in the x-direction.*

That is

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{-ij} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h}$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{ij} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{ij} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2k}$$

karena

$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{ij}$ *is equal to the difference between the two adjacent values of $f(x,y)$ in the y-direction divided by twice the mesh size in the y-direction.*

That is

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{ij} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2k}$$

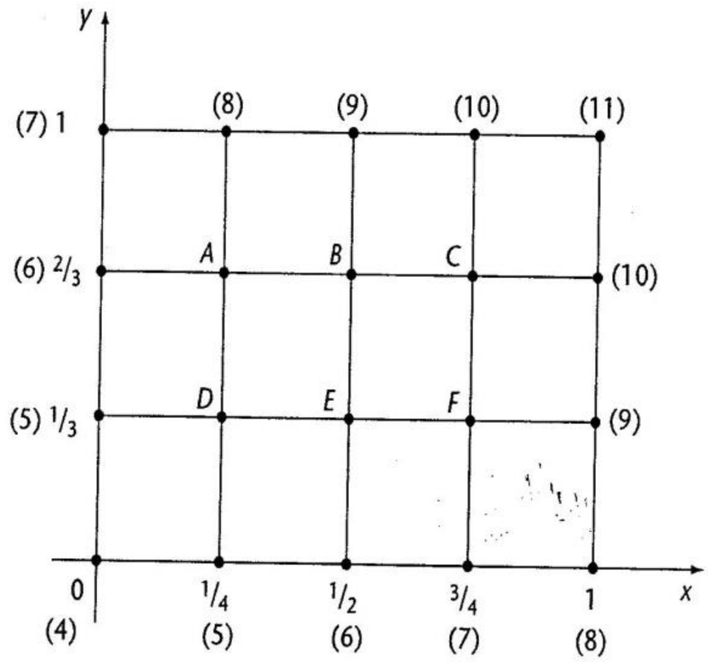
Example 1

Find the solution to $3\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - 4\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$, for $0 \le x \le 1$ and $0 \le y \le 1$ given that the boundary conditions are

$$f(x, 0) = 4x + 4$$
$$f(x, 1) = 4x + 7$$
$$f(0, y) = 3y + 4$$
$$f(1, y) = 3y + 8$$

for a mesh of size 1/4 in the x-direction and of size 1/3 in the y-direction.

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah membuat gambar diagram



Angka-angka dalam kurung adalah harga fungsi pada titik tersebut sesuai bentuk fungsinya, contoh f(x,0) = 4x + 4, maka pada titik (1/4, 0) didapatkan f(1/4,0)=5 dst

$$\text{We have } \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{ij} \doteq \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} = 2(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) \text{ because } h = 1/4$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{ij} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2k} = 1{\cdot}5(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}) \text{ because } k = 1/3$$

Therefore

$$3\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - 4\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \text{ becomes } \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$6(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) - 6(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}) = 0$$

Because

$$3\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - 4\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \text{ evaluated at the } ij\text{th grid point is}$$

$$3\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{ij} - 4\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{ij} = 0$$

maka

$$3 \times 2(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) - 4 \times 1{\cdot}5(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}) = 0, \text{ that is}$$

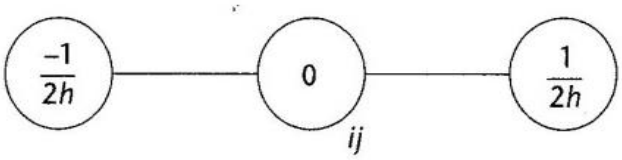
$$6(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) - 6(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}) = 0$$

COMPUTATIONAL MOLECULES

Harga dari turunan pertama ke x pada titik (x,y) pada grid, didapatkan dengan mengevaluasi ruas kanan dari persamaan.

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{ij} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} = \frac{-f_{i-1,j} + f_{i+1,j}}{2h}$$

Dan proses ini diulang untuk setiap titik grid dalam domain fungsi.

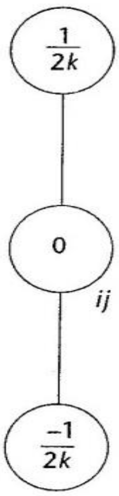


Tiga lingkaran pada satu baris digunakan untuk menghitung kontribusi dari tiga anggota baris yang bersangkutan terhadap persamaan. Jika lingkaran yang berlabel ij terletak pada titik grid ke ij, maka turunan pada titik tersebut didapatkan dari perkalian nilai fungsi pada titik grid i-1, j (satu ke kiri) dengan –1/2h dan menambahkan produk dari nilai fungsi pada titik grid i+1,j (satu ke kanan) dengan 1/2h. Angka 0 pada lingkaran tengah berarti bahwa kita mengalikan fi,j dengan 0 karena ini tidak masuk ke dalam persamaan. Template ini disebut ***computational molecule***.

Dengan cara yang sama, turunan pertama ke y pada titik grid ke ij adalah;

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{ij} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2k}$$

Dan ini direpresentasikan dengan *computational molecule* berikut



Dengan mengkombinasikan *computational molecule* seperti itu, kita dapat membentuk *composite molecule* yang merepresentasikan persamaan diferensial yang dimaksud.

Sebagai contoh, persamaan diferensial

$$a\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+b\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=c$$

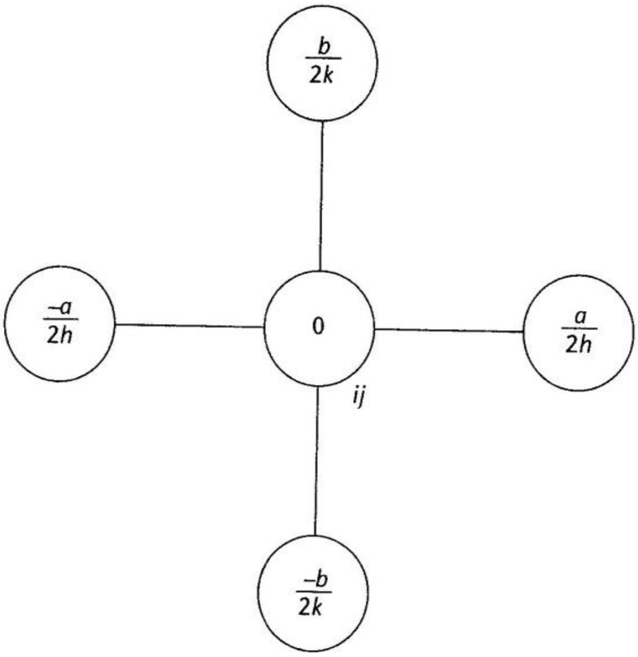
evaluated at the ijth grid point is

$$a\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{ij}+b\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{ij}=c$$

Dan direpresentasikan dengan *central difference formula*:

$$\frac{a}{2h}(f_{i+1,j}-f_{i-1,j})+\frac{b}{2k}(f_{i,j+1}-f_{i,j-1})=c$$

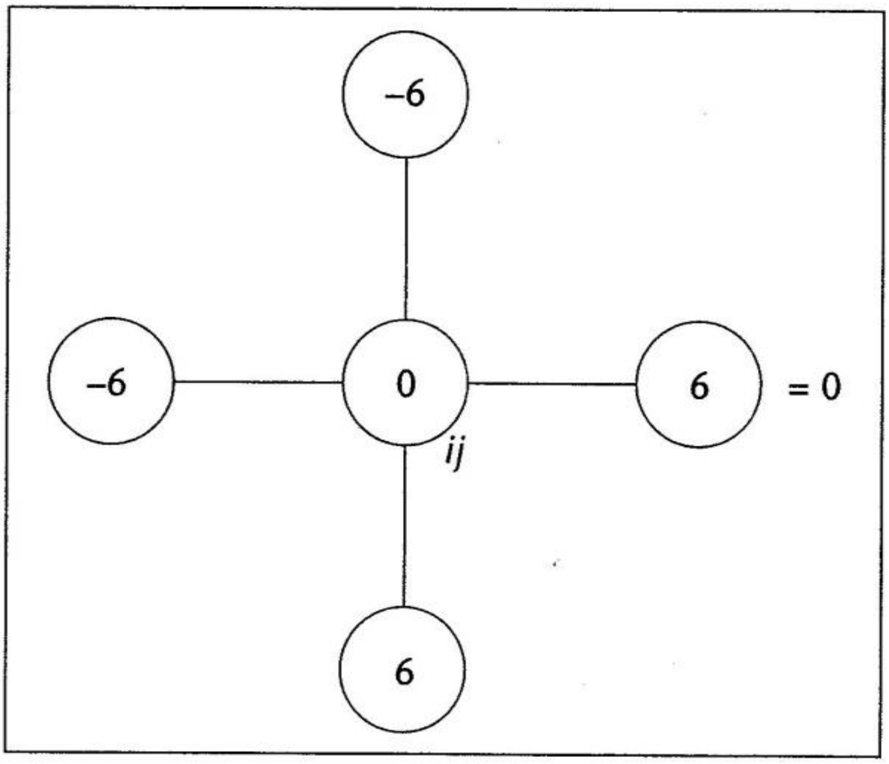
Dan jika direpresentasikan dengan *composite computational molecule*:



So the equation $3\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-4\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$ which is represented by the finite difference formula

$$6(f_{i+1,j}-f_{i-1,j})-6(f_{i,j+1}-f_{i,j-1})=0$$

Mempunyai *computational molecule:*



We now place the centre of the molecule, in turn, on each of the grid points at which we need to find the value of $f(x, y)$:

On A $\quad -36 - 48 + 6B + 6D = 0$

On B $\quad -6A - 54 + 6C + 6E = 0$

On C $\quad$ ....

On D $\quad$ ....

On E $\quad$ ....

On F $\quad$ ....

On A	$-36 - 48 + 6B + 6D = 0$
On B	$-6A - 54 + 6C + 6E = 0$
On C	$-6B - 60 + 60 + 6F = 0$
On D	$-30 - 6A + 6E + 30 = 0$
On E	$-6D - 6B + 6F + 36 = 0$
On F	$-6E - 6C + 54 + 42 = 0$

Sekarang kita mempunyai 6 persamaan linier simultan dengan 6 variabel yang belum diketahui harganya. Ini dapat dituliskan dalam bentuk matriks:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 \\ 54 \\ 0 \\ 0 \\ -36 \\ -96 \end{pmatrix}$$

Bentuknya adalah $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dengan penyelesaian $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$

Matriks ini dapat diselesaikan dengan ***Microsoft excel spreadsheet***, dengan prosedur sbb:

1. Buka *spreadsheet.*
2. Tempatkan *highlight cell* pada sel A1 dan masukkan nilai elemen-elemen matriks A pada sel A1 sampai dengan F6.
3. Tempatkan *highlight cell* pada sel H1 dan masukkan nilai elemen-elemen matriks b pada sel H1 sampai dengan H6.
4. Tempatkan *highlight cell* pada sel A8 dan block sel A8 sampai dengan F13. Ini adalah tempat untuk invers matriks A
5. Dengan kondisi block sel-sel tsb, ketik fungsi **=MINVERSE(A1:F6)** dan kemudian tekan 3 tombol sekaligus **Ctrl-Shift-Enter** bersama-sama. Sel-sel yang diblock tadi akan etrisi dengan elemen-elemen invers matriks A, atau A^{-1}.
6. Letakkan *highlight cell* pada sel H8 dan selanjutnya block H8 sampai dengan H13. Ini tempat untuk solusi **x**.
7. Ketik fungsi: **=MMULT(A8:F13,H8:H13)**, kemudian tekan 3 tombol sekaligus **Ctrl-Shift-Enter** bersama-sama.

Maka akan didapatkan $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ atau **x**, jadi hasilnya:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Hasil ini sama dengan yang didapatkan dari penyelesaian secara eksak, yaitu **f(x,y) = 4x + 3y + 4**

Example 2

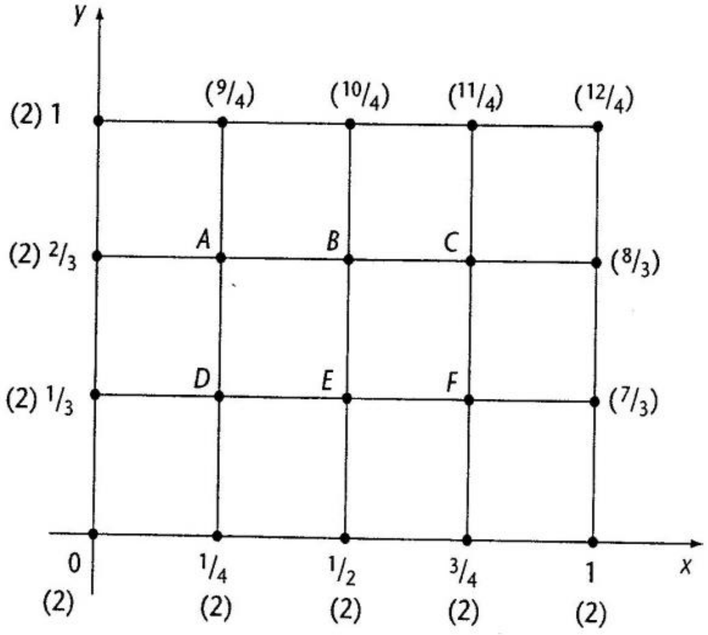
The solution to $x\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} - y\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$, for $0 \le x \le 1$ and $0 \le y \le 1$ given that

$$f(x,0) = 2$$
$$f(x,1) = x + 2$$
$$f(0,y) = 2$$
$$f(1,y) = y + 2$$

for a mesh of $1/4$ in the x-direction and $1/3$ in the y-direction is:

$$\boxed{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{\cdot}166\ldots \\ 2{\cdot}33\ldots \\ 2{\cdot}5 \\ 2{\cdot}0833\ldots \\ 2{\cdot}166\ldots \\ 2{\cdot}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/6 \\ 7/3 \\ 5/2 \\ 25/12 \\ 13/6 \\ 9/4 \end{pmatrix}}$$

Karena



The central difference formulas for the two first partial derivatives of $f(x, y)$ are

$$\left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{ij} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} = 2(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) \text{ because } h = 1/4$$

$$\left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{ij} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2k} = 1{\cdot}5(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}) \text{ because } k = 1/3$$

Therefore

$$x\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - y\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \text{ becomes } \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2(x_i f_{i+1,j} - x_i f_{i-1,j}) - 1{\cdot}5(y_j f_{i,j+1} - y_j f_{i,j-1}) = 0$$

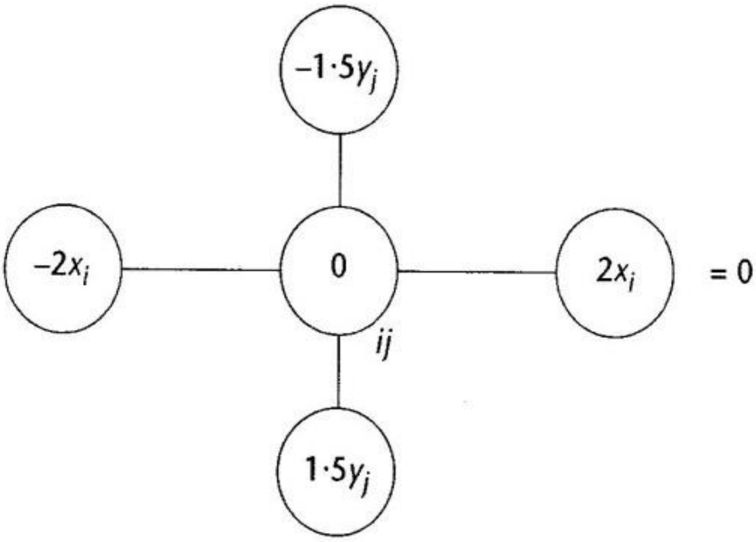
Because

$$x\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - y\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

is written using the central difference formulas as

$$\begin{aligned} &2x_i(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) - 1{\cdot}5y_j(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}) \\ &= 2(x_i f_{i+1,j} - x_i f_{i-1,j}) - 1{\cdot}5(y_j f_{i,j+1} - y_j f_{i,j-1}) = 0 \end{aligned}$$

Ini mempunyai ***computational molecule*** sbb:



On A at $\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$: $-2\left(\frac{1}{4}\right)(2) - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{9}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right)B + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)D = 0$

On B at $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$: $-2\left(\frac{1}{2}\right)A - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{10}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)C + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)E = 0$

On C at $\left(\frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right)$: $-2\left(\frac{3}{4}\right)B - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{11}{4}\right) + 2\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{8}{3}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)F = 0$

On D at $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$: $-2\left(\frac{1}{4}\right)(2) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)A + 2\left(\frac{1}{4}\right)E + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(2) = 0$

On E at $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$: $-2\left(\frac{1}{2}\right)D - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)B + 2\left(\frac{1}{2}\right)F + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(2) = 0$

On F at $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right)$: $-2\left(\frac{3}{4}\right)E - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)C + 2\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{7}{3}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(2) = 0$

On A $B/2 + D = 13/4$

On B $-A + C + E = 10/4$

On C $-3B/2 + F = -5/4$

On D $-A/2 + E/2 = 0$

On E $-B/2 - D + F = -1$

On F $-C/2 - 3E/2 = -9/2$

Matriksnya:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & -1.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/4 \\ 10/4 \\ -5/4 \\ 0 \\ -1 \\ -9/2 \end{pmatrix}$$

Dengan Microsoft excel seperti di atas, dihasilkan:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.166\ldots \\ 2.3\ldots \\ 2.5 \\ 2.0833\ldots \\ 2.166\ldots \\ 2.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/6 \\ 7/3 \\ 5/2 \\ 25/12 \\ 13/6 \\ 9/4 \end{pmatrix}$$

PD YANG DILENGKAPI DENGAN SYARAT BATAS

Example 3

Find the solution to $4\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} + 2\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3$, for $0 \le x \le 1$ and $0 \le y \le 1$ given that the boundary conditions are

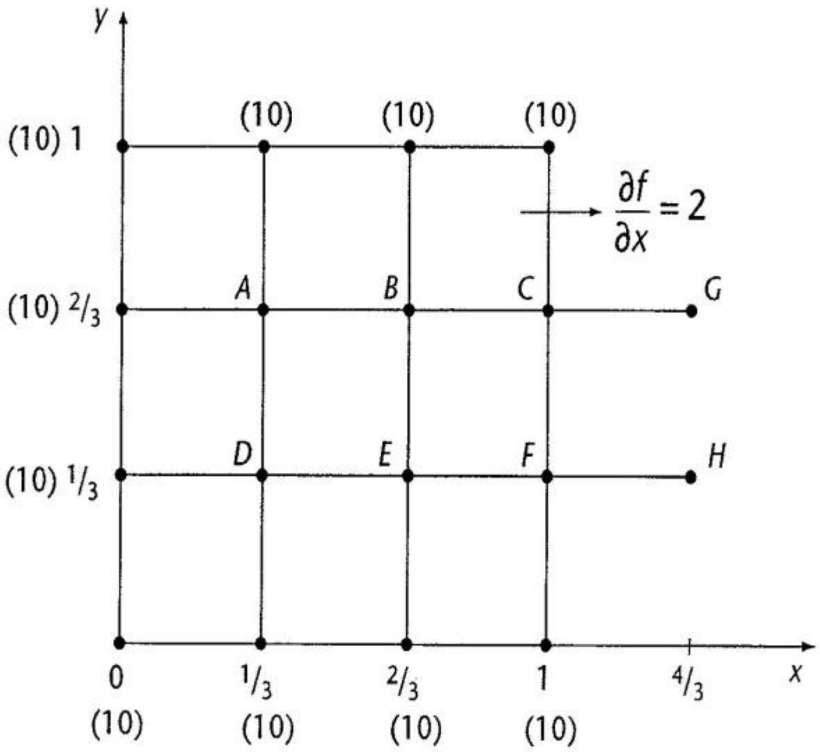
$$f(x,0) = f(x,1) = f(0,y) = 10$$

and $\left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x=1} = 2$

for a mesh of size 1/3 in both the x-direction and the y-direction.

Penyelesaian:

Domain dari f(x,y) digambarkan dengan diagram grid sbb:



We have $\left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{ij} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} = 1{\cdot}5\left(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}\right)$

$$\left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{ij} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2k} = 1{\cdot}5\left(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}\right)$$

because both h and $k = 1/3$

Therefore

$4\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + 2\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3$ becomes ....

$$6\left(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}\right) + 3\left(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}\right) = 3$$

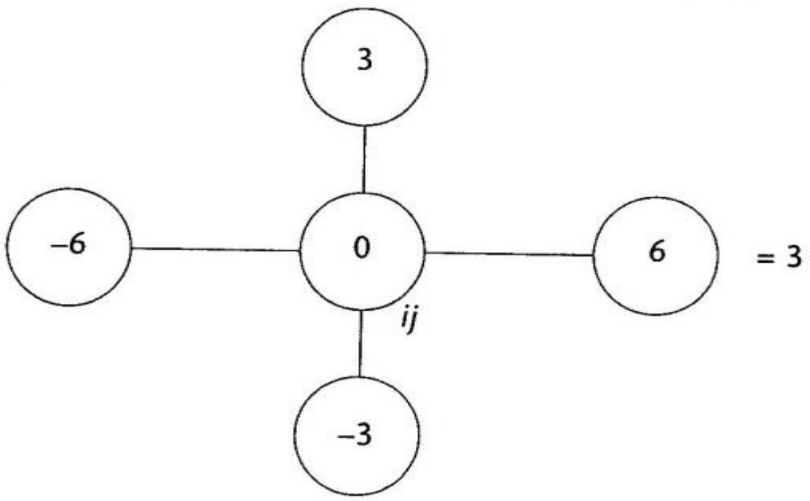
Because

$4\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + 2\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3$ can be written as

$4 \times 1{\cdot}5\left(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}\right) + 2 \times 1{\cdot}5\left(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}\right) = 3$, that is

$$6\left(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}\right) + 3\left(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}\right) = 3$$

Computational molecule:



On A $-60+30+6B-3E=3$

On B $-6A+30+6C-3E=3$

On C $-6B+30+6G-3F=3$

On D $-60+3A+6E-30=3$

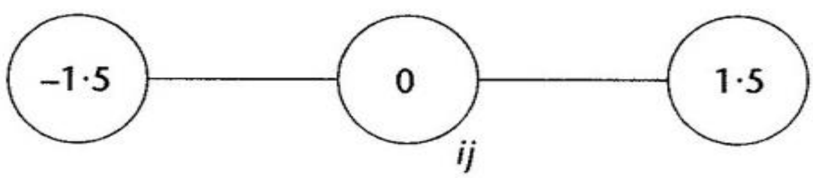
On E $-6D+3B+6F-30=3$

On F $-6E+3C+6H-30=3$

At the boundary $x=1$ the boundary condition $\left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x=1}=2$ can be written using the central difference formula as

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\ y=y_j}}=\frac{f_{i+1,j}-f_{i-1,j}}{2h}=1{\cdot}5(f_{i+1,j}-f_{i-1,j})=2$$

Dan mempunyai *computational molecule*:



On C $-1{\cdot}5B+1{\cdot}5G=2$

On F $-1{\cdot}5E+1{\cdot}5H=2$

Atau **On C : -6B + 6G = 8**

On F : -6E + 6H = 8

Kita sekarang dapat menggunakan dua persamaan terkhir untuk untuk mengeliminasi G dan H dari 6 persamaan di atas (hal 49) atau untuk membentuk system matriks 8x8.

On A $6B - 3E = 33$

On B $-6A + 6C - 3E = -27$

On C $-3F = -35$

On D $3A + 6E = 93$

On E $-6D + 3B + 6F = 33$

On F $3C = 25$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ -27 \\ -35 \\ 93 \\ 33 \\ 25 \end{pmatrix}$$

That is

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ with solution $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

Inverting the matrix $\mathbf{A}^{-1}$ we find that $\mathbf{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{\cdot}777\ldots \\ 11{\cdot}555\ldots \\ 8{\cdot}333\ldots \\ 11{\cdot}9444\ldots \\ 12{\cdot}111\ldots \\ 11{\cdot}666\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61/9 \\ 104/9 \\ 25/3 \\ 215/18 \\ 109/9 \\ 35/3 \end{pmatrix}$$

TURUNAN PARSIAL ORDE DUA

Central difference formula untuk derivative orde dua adalah:

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_{ij} \approx \frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{h^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|_{ij} \approx \frac{f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1}}{k^2}$$

Example 4

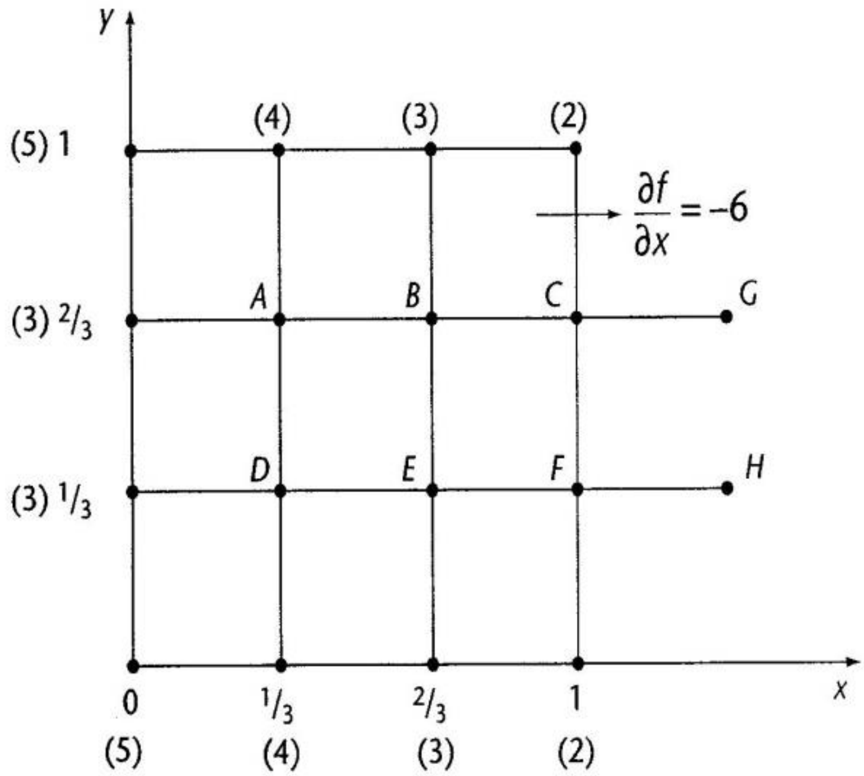
Given a grid with mesh size $h = k = 1/3$, find a numerical solution to the equation

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0 \text{ for } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \text{ given that}$$

$$f(x,0) = f(x,1) = 5 - 3x$$

$$f(0,y) = 9y^2 - 9y + 5 \quad \text{and}$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x=1} = -6$$

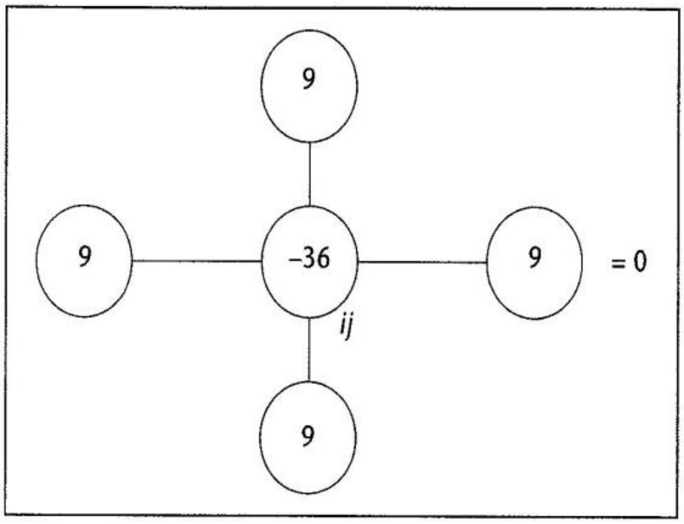


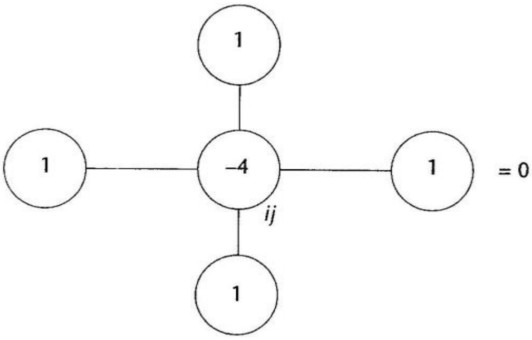
Central difference formula:

$$9\left(f_{i+1,j} + f_{i,j+1} - 4f_{i,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j-1}\right)$$

karena

$$\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_{ij} + \left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|_{ij} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2} + \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{k^2}$$
$$= 9\left(f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}\right) + 9\left(f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}\right)$$
$$= 9\left(f_{i+1,j} + f_{i,j+1} - 4f_{i,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j-1}\right)$$





At A $3+4+B+D-4A=0$

At B ....

At C ....

At D ....

At E ....

At F ....

At A $3+4+B+D-4A=0$

At B $A+3+C+E-4B=0$

At C $B+2+G+F-4C=0$

At D $3+A+E+4-4D=0$

At E $D+B+F+3-4E=0$

At F $E+C+H+2-4F=0$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x=1} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} = \frac{3}{2}(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) = -6$$

$$\frac{3}{2}(-B+G) = -6$$
$$\frac{3}{2}(-E+H) = -6$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{ij} = \frac{-f_{i-1,j} + f_{i+1,j}}{2h} = \frac{3}{2}(-f_{i-1,j} + f_{i+1,j}) \quad \text{because } h = 1/3$$

$$\frac{3}{2}(-B+G) = -6 \text{ so } G = -4 + B$$
$$\frac{3}{2}(-E+H) = -6 \text{ so } H = -4 + E$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 2 \\ -7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28/9 \\ 7/3 \\ 8/9 \\ 28/9 \\ 7/3 \\ 8/9 \end{pmatrix}$$