

BAB II

DEFLEKSI DAN ROTASI BALOK TERLENTUR

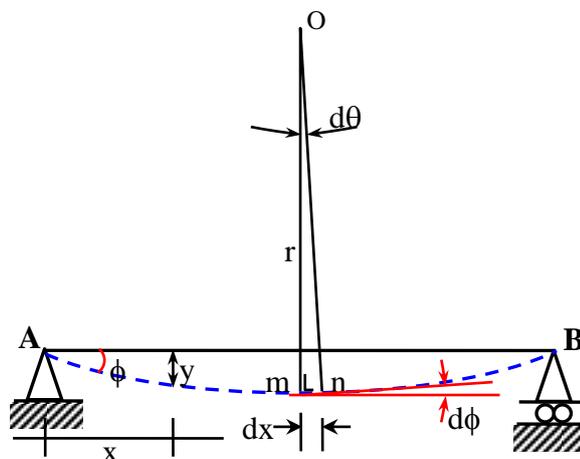
A. Defleksi

Semua balok yang terbebani akan mengalami deformasi (perubahan bentuk) dan terdefleksi (atau melentur) dari kedudukannya. Dalam struktur bangunan, seperti : balok dan plat lantai tidak boleh melentur terlalu berlebihan untuk mengurangi/meniadakan pengaruh psikologis (ketakutan) pemakainya.

Ada beberapa metode yang dapat dipergunakan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan defleksi dan deformasi pada balok, diantaranya adalah : metode integrasi ganda (*"doubel integrations"*), luas bidang momen (*"Momen Area Method"*), dan metode luas bidang momen sebagai beban. Metode integrasi ganda sangat cocok dipergunakan untuk mengetahui defleksi sepanjang bentang sekaligus. Sedangkan metode luas bidang momen sangat cocok dipergunakan untuk mengetahui defleksi dalam satu tempat saja. Asumsi yang dipergunakan untuk menyelesaikan persoalan tersebut adalah hanyalah defleksi yang diakibatkan oleh gaya-gaya yang bekerja tegak-lurus terhadap sumbu balok, defleksi yang terjadi relative kecil dibandingkan dengan panjang baloknya, dan irisan yang berbentuk bidang datar akan tetap berupa bidang datar walaupun terdeformasi.

1. Metode Integrasi Ganda

Suatu struktur sederhana yang mengalami lentur dapat digambarkan sebagaimana gambar 2.1, dimana y adalah defleksi pada jarak x , dengan x adalah jarak lendutan yang ditinjau, dx adalah jarak mn , $d\theta$ sudut mon, dan r adalah jari-jari lengkung.



Gambar 2.1. Balok sederhana yang mengalami lentur

Berdasarkan gambar 2.1. didapat besarnya

$$dx = r \operatorname{tg} d\phi$$

karena besarnya $d\phi$ relatif sangat kecil maka $\operatorname{tg} d\phi = d\phi$ saja sehingga persamaannya dapat ditulis menjadi :

$$dx = r \cdot d\phi \text{ atau } \frac{1}{r} = \frac{d\phi}{dx}$$

Jika dx bergerak kekanan maka besarnya $d\phi$ akan semakin mengecil atau semakin berkurang sehingga didapat persamaan :

$$\frac{1}{r} = -\frac{d\phi}{dx}$$

Lendutan relatif sangat kecil sehingga $\phi = \operatorname{tg}\phi = \frac{dy}{dx}$, sehingga didapat persamaan :

$$\frac{1}{r} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = -\left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)$$

Persamaan tegangan $\frac{1}{r} = -\frac{M}{EI}$, sehingga didapat persamaan $\frac{M}{EI} = -\frac{d^2y}{dx^2}$

Sehingga didapat persamaan $EI \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = -M$ (2.1)

Persamaan 2.1 jika dilakukan dua kali integral akan didapat persamaan

$$EI \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dM}{dx} = V$$

$$EI(y) = \frac{dV}{dx} = q$$

Untuk mempermudah pemahaman tentang pemakaian metode integrasi ganda, akan dicoba diaplikasikan pada struktur balok sederhana.

Contoh 2.1. Sebuah balok sederhana yang menahan beban merata seperti pada gambar 2.2

Dari gambar 2.2 besarnya momen pada jarak x sebesar

$$M_x = R_A \cdot x - \frac{1}{2} q x^2$$

$$M_x = \frac{qL}{2} \cdot x - \frac{1}{2} q x^2$$

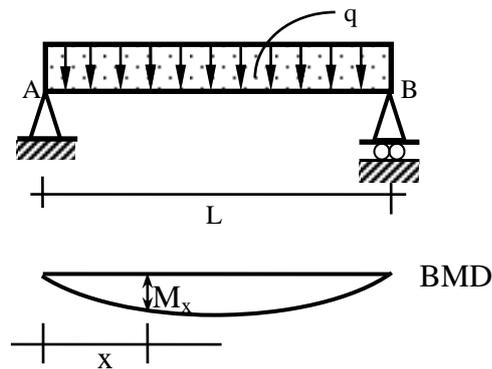
Persamaan tersebut disubstitusi ke dalam persamaan 2.1 sehingga didapat

$$EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = -\frac{qL}{2}x + \frac{1}{2}qx^2$$

Diintegral terhadap x sehingga didapat

$$\int EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \int -\frac{qL}{2}x + \frac{1}{2}qx^2$$

$$EI \left(\frac{dy}{dx} \right) = -\frac{qLx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + C_1$$



Gambar 2.2. Balok Sederhana dengan beban merata

Momen maksimum terjadi pada $x = \frac{L}{2}$, dan pada tempat tersebut terjadi defleksi maksimum, $\frac{dy}{dx} = 0$, sehingga persamaannya menjadi

$$0 = -\frac{qL \left(\frac{L}{2} \right)^2}{4} + \frac{q \left(\frac{L}{2} \right)^3}{6} + C_1$$

$$0 = -\frac{qL^3}{48} + \frac{qL^3}{16} + C_1$$

$$C_1 = \frac{qL^3}{24}$$

Sehingga persamaan di atas akan menjadi

$$EI \left(\frac{dy}{dx} \right) = -\frac{qLx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + \frac{qL^3}{24}$$

Dari persamaan tersebut diintegrasikan kembali terhadap x sehingga menjadi

$$\int EI \left(\frac{dy}{dx} \right) = \int -\frac{qLx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + \frac{qL^3}{24}$$

$$EI \ y = -\frac{qLx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{qL^3x}{24} + C_2$$

Pada $x = 0$, lendutan $y = 0$, sehingga didapat C_2 , dan persamaannya menjadi

$$0 = 0 + 0 + 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

$$EI \ y = -\frac{qLx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{qL^3x}{24} + 0$$

$$y = \frac{qx}{24EI} (-2Lx^2 + x^3 + L^3)$$

$$y = \frac{qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

Pada $x = \frac{L}{2}$ akan diperoleh lendutan maksimum sehingga didapat

$$y_{\max} = \frac{q \frac{L}{2}}{24EI} \left(L^3 - 2L \left(\frac{L}{2} \right)^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^3 \right)$$

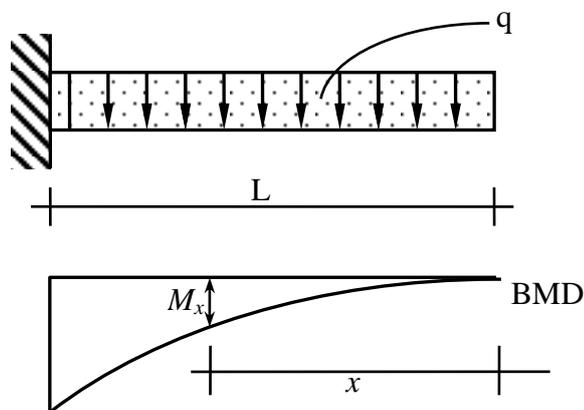
$$y_{\max} = \frac{qL}{48EI} \left(L^3 - \frac{L^3}{2} + \frac{L^3}{8} \right)$$

$$y_{\max} = \frac{qL}{48EI} \left(\frac{5L^3}{8} \right)$$

Sehingga lendutan maksimum yang terjadi di tengah bentang didapat :

$$y_{\max} = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} \tag{2.2}$$

Contoh 2.2. Stuktur cantilever dengan beban merata seperti pada gambar 2.3.



Gambar 2.3. Balok Cantilever dengan Beban Merata

Dari gambar 2.3 besarnya momen pada jarak x sebesar

$$M_x = -\frac{1}{2} q x^2$$

Persamaan tersebut disubstitusi ke dalam persamaan 2.1 sehingga didapat

$$EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{1}{2} q x^2$$

Diintegral terhadap x sehingga didapat

$$\int EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \int \frac{1}{2} q x^2$$

$$EI \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{q x^3}{6} + C_1$$

Momen maksimum terjadi pada $x = L$, dan pada tempat tersebut tidak terjadi defleksi,

$\frac{dy}{dx} = 0$, sehingga persamaannya menjadi

$$0 = \frac{q x^3}{6} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{q L^3}{6}$$

Sehingga persamaan di atas akan menjadi

$$EI \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{q x^3}{6} - \frac{q L^3}{6}$$

Dari persamaan tersebut diintergralkan kembali terhadap x sehingga menjadi

$$\int EI \left(\frac{dy}{dx} \right) = \int \frac{q x^3}{6} - \frac{q L^3}{6}$$

$$EI y = \frac{q x^4}{24} - \frac{q L^3 x}{6} + C_2$$

Pada $x = L$, lendutan $y = 0$, sehingga didapat C_2

$$0 = \frac{q L^4}{24} - \frac{q L^4}{6} + C_2$$

$$C_2 = \frac{q L^4}{8}$$

Persamaannya menjadi

$$EI \ y = \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3x}{6} + \frac{qL^4}{8}$$

$$y = \frac{q}{24EI} (x^4 - 4L^3x + 3L^4)$$

Pada $x = 0$ akan diperoleh lendutan maksimum sehingga didapat

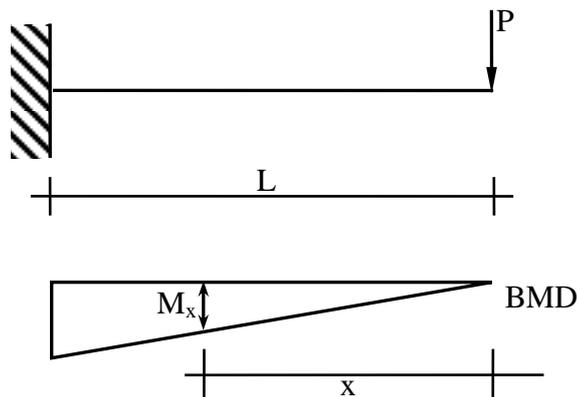
$$y_{\max} = \frac{q}{24EI} (0 - 0 + 3L^4)$$

$$y_{\max} = \frac{3qL^4}{24EI}$$

Sehingga lendutan maksimum cantilever (pada ujung batang) didapat :

$$y_{\max} = \frac{qL^4}{8EI} \tag{1.3}$$

Contoh 2.3. Struktur cantilever dengan titik seperti pada gambar 2.4



Gambar 2.4. Balok Cantilever dengan Beban Titik

Dari gambar 2.4 besarnya momen pada jarak x sebesar

$$M_x = - Px$$

Persamaan tersebut disubstitusi ke dalam persamaan 2.1 sehingga didapat

$$EI \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = Px$$

Diintegral terhadap x sehingga didapat

$$\int EI \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \int Px$$

$$EI \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{Px^2}{2} + C_1$$

Momen maksimum terjadi pada $x = L$, dan pada tempat tersebut tidak terjadi defleksi,

$\frac{dy}{dx} = 0$, sehingga persamaannya menjadi

$$0 = \frac{PL^2}{2} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{PL^2}{2}$$

Sehingga persamaan di atas akan menjadi

$$EI \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{Px^2}{2} - \frac{PL^2}{2}$$

Dari persamaan tersebut diintegrasikan kembali terhadap x sehingga menjadi

$$\int EI \left(\frac{dy}{dx} \right) = \int \frac{Px^2}{2} - \frac{PL^2}{2}$$

$$EI \ y = \frac{Px^3}{6} - \frac{PL^2x}{2} + C_2$$

$$EI \ y = \frac{Px}{6} (L^3 - 3L^2) + C_2$$

Pada $x = L$, lendutan $y = 0$, sehingga didapat C_2

$$0 = \frac{PL}{6} (L^3 - 3L^2) + C_2$$

$$C_2 = \frac{PL^3}{3}$$

Persamaannya menjadi

$$EI \ y = \frac{Px}{6} (x^3 - 3L^2) + \frac{PL^3}{3}$$

$$EI \ y = \frac{P}{6} (x^3 - 3xL^2 + 2L^3)$$

$$y = \frac{q}{6EI} (x^3 - 3xL^2 + 2L^3)$$

Pada $x = 0$ akan diperoleh lendutan maksimum sehingga didapat

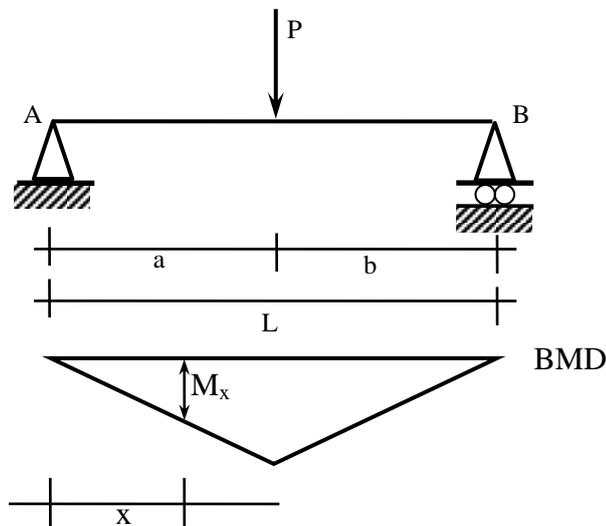
$$y = \frac{q}{6EI} (0 - 0 + 2L^3)$$

$$y_{\max} = \frac{PL^3}{3EI}$$

Sehingga lendutan maksimum cantilever dengan bebat titik (pada ujung batang) didapat :

$$y_{\max} = \frac{qL^4}{8EI} \quad (2.4)$$

Contoh 2.4. Struktur balok sederhana dengan beban titik, seperti pada gambar 2.5



Gambar 2.5. Balok Sederhana dengan beban titik

Dari gambar 2.5 besarnya reaksi dukungan dan momen sebesar

$$R_A = \frac{Pb}{L}, \quad \text{dan} \quad R_B = \frac{Pa}{L}$$

$$M_x = \frac{Pbx}{L} \quad \text{untuk } x \leq a$$

$$M_x = \frac{Pbx}{L} - P(x-a) \quad \text{untuk } x \geq a$$

Persamaan tersebut disubstitusi ke dalam persamaan 2.1 persamaan garis elastis sehingga didapat :

$$\text{untuk } x \leq a \quad EI \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = -\frac{Pbx}{L}$$

$$\text{untuk } x \geq a \quad EI \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = -\frac{Pbx}{L} + P(x-a)$$

Diintegral terhadap x sehingga didapat

$$EI \left(\frac{dy}{dx} \right) = -\frac{Pbx^2}{2L} + C_1$$

$$EI \left(\frac{dy}{dx} \right) = -\frac{Pbx^2}{2L} + \frac{P(x-a)^2}{2} + C_2$$

Pada $x = a$, dua persamaan di atas hasilnya akan sama.

Jika diintegral lagi mendapatkan persamaan :

$$EI \ y = -\frac{Pbx^3}{6L} + C_1x + C_3 \quad \text{untuk } x \leq a$$

$$EI \ y = -\frac{Pbx^3}{6L} + \frac{P(x-a)^3}{6} + C_2x + C_4 \quad \text{untuk } x \geq a$$

Pada $x = a$, maka nilai C_1 harus sama dengan C_2 , maka $C_3 = C_4$, sehingga persamaannya menjadi :

$$EI \ y = -\frac{Pbx^3}{6L} + \frac{P(x-a)^3}{6} + C_1x + C_3$$

Untuk $x = 0$, maka $y = 0$, sehingga nilai $C_3 = C_4 = 0$

Untuk $x = L$, maka $y = 0$, sehingga persamaan di atas dapat ditulis menjadi :

$$0 = -\frac{PbL^3}{6L} + \frac{P(L-a)^3}{6} + C_1L + 0$$

Besarnya $L - a = b$

$$C_1 = \frac{PbL}{6} - \frac{Pb^3}{6L}$$

$$C_1 = \frac{Pb}{6L} (L^2 - b^2)$$

Sehingga setelah disubstitusi menghasilkan persamaan :

$$y = -\frac{Pbx}{6EIL} (L^2 - b^2 - x^2) \quad \text{untuk } x \leq a$$

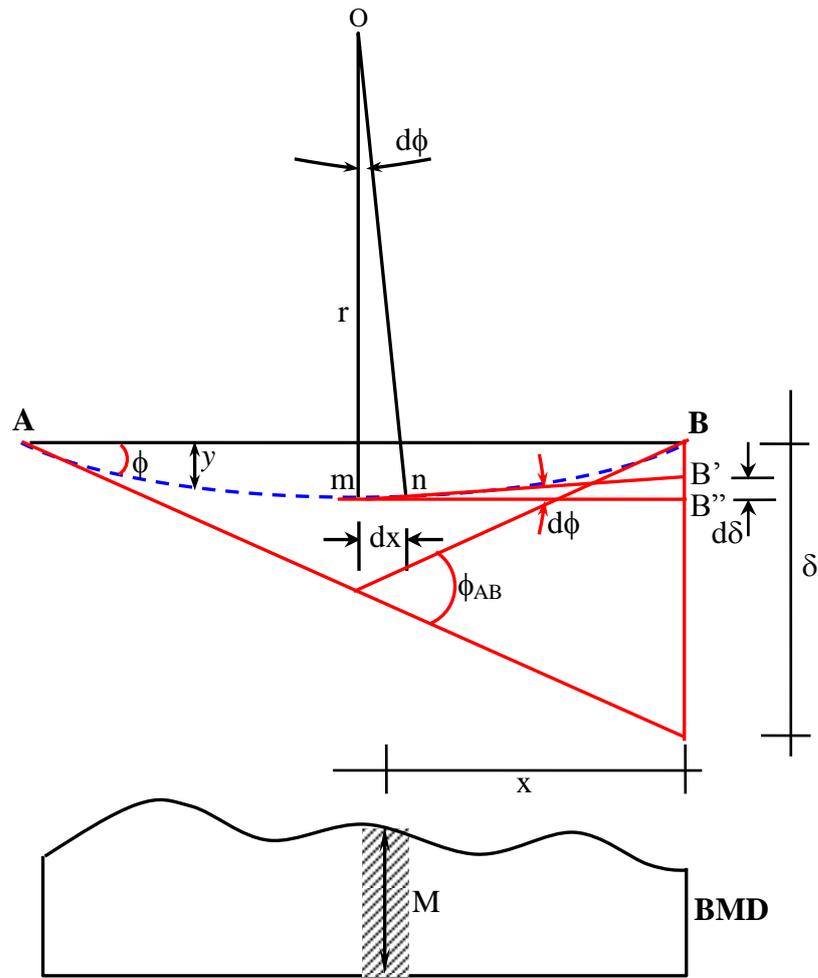
$$y = -\frac{Pbx}{6EIL} (L^2 - b^2 - x^2) + \frac{P(x-a)^3}{6EI} \quad \text{untuk } x \geq a \quad (2.5)$$

2. Metode Luas Bidang Momen

Pada pembahasan di atas telah dihasilkan lendutan yang berupa persamaan. Hasil tersebut masih bersifat umum, namun mempunyai kelemahan apabila diterapkan pada

struktur dengan pembebanan yang lebih kompleks, maka dirasa kurang praktis, karena harus melalui penjabaran secara matematis.

Metode luas bidang momen inipun juga mempunyai kelemahan yang sama apabila dipakai pada konstruksi dengan pembebanan yang lebih kompleks. Namun demikian metode ini sedikit lebih praktis, karena proses hitungan dilakukan tidak secara matematis tetapi bersifat numeris.



Gambar 2.6. Gambar Balok yang mengalami Lentur

Dari gambar 2.6 tersebut didapat persamaan

$$\frac{1}{r} = \frac{d\phi}{dx} = \frac{M}{EI}$$

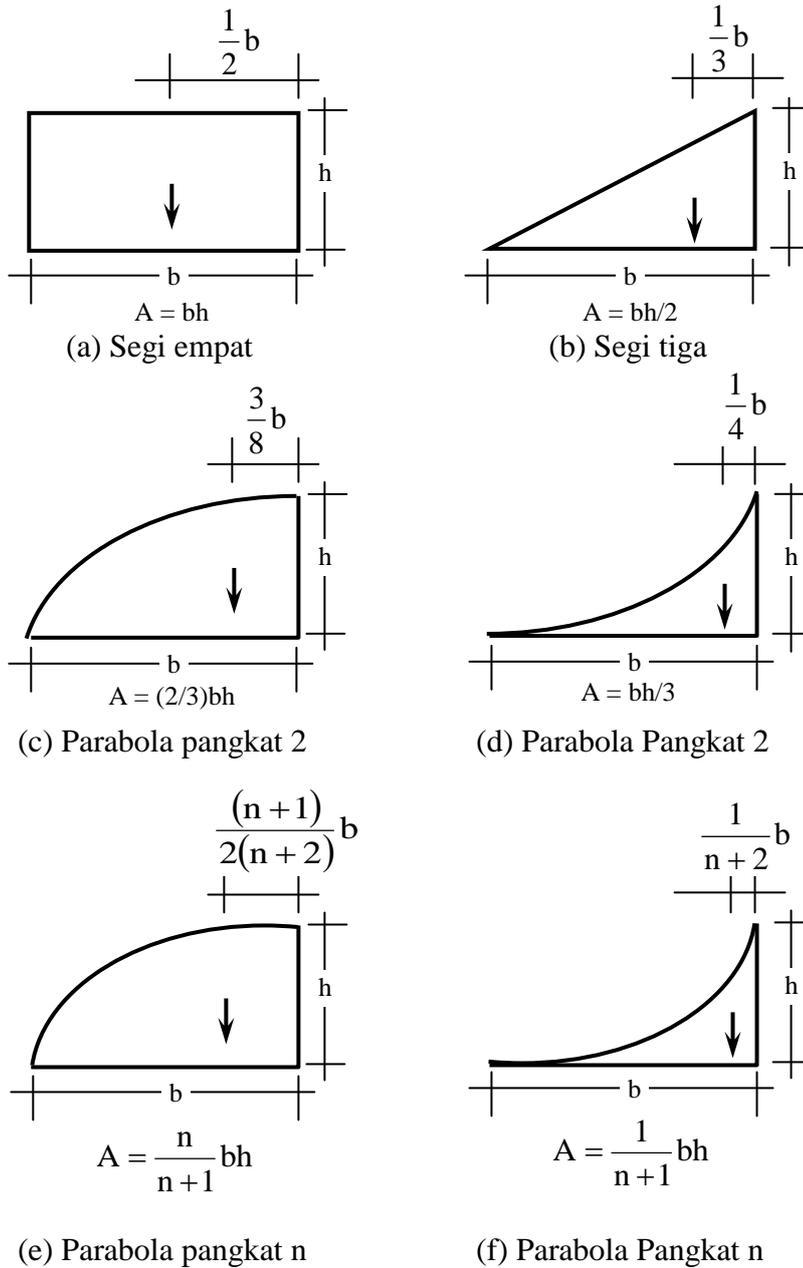
atau dapat ditulis menjadi

$$d\phi = \frac{M}{EI} dx \tag{2.6}$$

Dari persamaan 2.6 dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi I: Elemen sudut $d\phi$ yang dibentuk oleh dua tangen arah pada dua titik yang berjarak dx , besarnya sama dengan luas bidang momen antara dua titik tersebut dibagi dengan EI .

Dari gambar 2.6, apabila dx adalah panjang balok AB, maka besarnya sudut yang dibentuk adalah :



Gambar 2.7. Letak titik berat

$$\phi_{AB} = \int_0^L \frac{M}{EI} dx$$

Berdasarkan garis singgung m dan n yang berpotongan dengan garis vertikal yang melewati titik B, akan diperoleh :

$$BB'' = d\delta = x.d\phi = \frac{M.x}{EI} dx \quad (2.7)$$

Nilai $M.dx$ = Luas bidang momen sepanjang dx.

$M.x.dx$ = Statis momen luas bidang M terhadap titik yang berjarak x dari elemen M.

Sehingga dari persamaan 2.7 dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi II : Jarak vertikal pada suatu tempat yang dibentuk dua garis singgung pada dua titik suatu balok besarnya sama dengan statis momen luas bidang momen terhadap tempat tersebut dibagi dengan EI.

$$\text{Jarak } BB' = \delta = \int_0^L \frac{M.x}{EI} dx$$

Untuk menyelesaikan persamaan tersebut yang menjadi persoalan adalah letak titik berat suatu luasan, karena letak titik berat tersebut diperlukan dalam menghitung statis momen luas $M.dx.x$. Letak titik berat dari beberapa luasan dapat dilihat pada gambar 2.7.

Untuk mempermudah pemahaman tentang pemakaian metode luas bidang momen, akan dicoba diaplikasikan pada struktur balok sederhana.

Contoh 2.5. Balok Sederhana dengan Beban Merata

Hitung defleksi maksimum (δ_C) yang terjadi pada struktur balok sederhana yang menahan beban merata, sebagaimana digambarkan pada gambar 2.8, dengan metode luas bidang momen.

Penyelesaian :

Besarnya momen di C akibat beban merata sebesar $M_C = \frac{1}{8}qL^2$

Letak titik berat dari tumpuan A sebesar $= \frac{5}{8} \cdot \frac{L}{2} = \frac{5}{16}L$

Berdasarkan definisi I besarnya sudut terhadap titik C adalah sebesar :

$$\phi_c = \frac{\text{Luas bidang momen}}{EI}$$

$$\phi_c = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} qL^2 \cdot \frac{L}{2}}{EI}$$

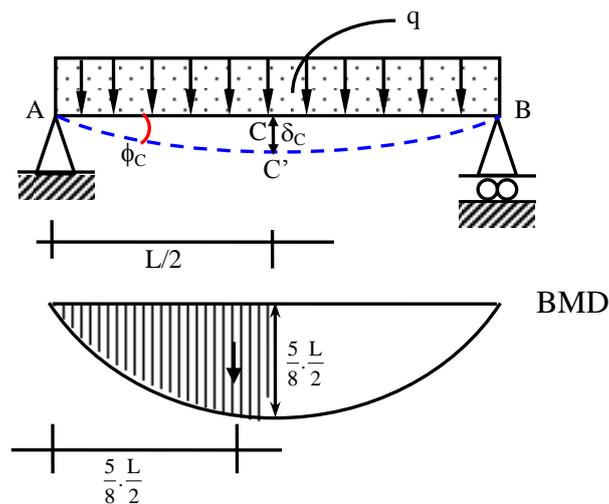
$$\phi_c = \frac{qL^3}{24EI}$$

Berdasarkan definisi II besarnya jarak lendutan vertikal di C sebesar :

$$CC' = \delta_c = \frac{\text{Statis momen luas bidang}}{EI}$$

$$\delta_c = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} qL^2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{5L}{16}}{EI}$$

$$\delta_c = \frac{5qL^4}{384EI}$$



Gambar 2.8. Balok sederhana yang menahan beban merata

Contoh 2.6. Cantilever dengan Beban Merata

Hitung defleksi maksimum (δ_B) yang terjadi pada struktur cantilever yang menahan beban merata, sebagaimana digambarkan pada gambar 2.9, dengan metode luas bidang momen.

Penyelesaian :

Besarnya momen di A akibat beban merata sebesar $M_A = -\frac{1}{2}qL^2$

Letak titik berat ke titik B sebesar $= \frac{3}{4}L$

Berdasarkan definisi I besarnya sudut terhadap titik B adalah sebesar :

$$\phi_B = \frac{\text{Luas bidang momen}}{EI}$$

$$\phi_B = \frac{\frac{1}{3}L \cdot \frac{1}{2}qL^2}{EI}$$

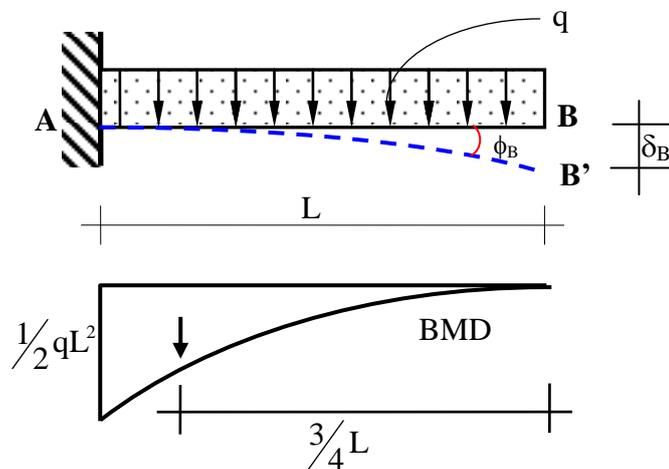
$$\phi_B = \frac{qL^3}{6EI}$$

Berdasarkan definisi II besarnya jarak lendutan vertikal di B sebesar :

$$BB' = \delta_B = \frac{\text{Statis momen luas bidang}}{EI}$$

$$\delta_B = \frac{\frac{1}{3}L \cdot \frac{1}{2}qL^2 \cdot \frac{3}{4}L}{EI}$$

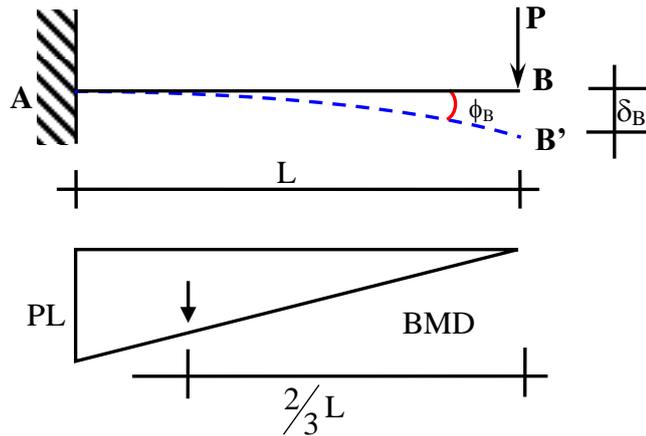
$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI}$$



Gambar 2.9. Cantilever yang menahan beban merata

Contoh 2.7. Cantilever dengan Beban Titik

Hitung defleksi maksimum (δ_B) yang terjadi pada struktur cantilever yang menahan beban titik, sebagaimana digambarkan pada gambar 2.10, dengan metode luas bidang momen.



Gambar 2.10. Cantilever yang menahan beban titik

Penyelesaian :

Besarnya momen di A akibat beban merata sebesar $M_A = - PL$

Letak titik berat ke titik B sebesar $= \frac{2}{3}L$

Berdasarkan definisi I besarnya sudut terhadap titik B adalah sebesar :

$$\phi_B = \frac{\text{Luas bidang momen}}{EI}$$

$$\phi_B = \frac{\frac{1}{2}L.PL}{EI}$$

$$\phi_B = \frac{PL^2}{2EI}$$

Berdasarkan definisi II besarnya jarak lendutan vertikal di B sebesar :

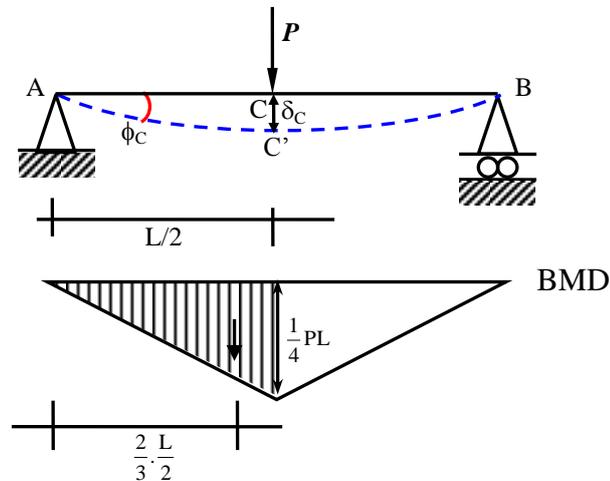
$$BB' = \delta_B = \frac{\text{Statis momen luas bidang}}{EI}$$

$$\delta_B = \frac{\frac{1}{2}L.PL \cdot \frac{2}{3}L}{EI}$$

$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI}$$

Contoh 2.8. Balok Sederhana dengan Beban Titik

Hitung defleksi maksimum (δ_C) yang terjadi pada struktur balok sederhana yang menahan beban titik, sebagaimana digambarkan pada gambar 2.11, dengan metode luas bidang momen.



Gambar 2.11. Balok sederhana yang menahan beban titik

Penyelesaian :

Besarnya momen di C akibat beban merata sebesar $M_C = \frac{1}{4}PL$

Letak titik berat dari tumpuan A sebesar $= \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{3}L$

Berdasarkan definisi I besarnya sudut terhadap titik C adalah sebesar :

$$\phi_C = \frac{\text{Luas bidang momen}}{EI}$$

$$\phi_C = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}L \cdot \frac{1}{4}PL}{EI}$$

$$\phi_C = \frac{PL^2}{16EI}$$

Berdasarkan definisi II besarnya jarak lendutan vertikal di C sebesar :

$$CC' = \delta_C = \frac{\text{Statis momen luas bidang}}{EI}$$

$$\delta_C = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}L \cdot \frac{1}{4}PL \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{2}}{EI}$$

$$\delta_C = \frac{PL^3}{48EI}$$

3. Metode Luas Bidang Momen Sebagai Beban

Dua metoda yang sudah dibahas di atas mempunyai kelemahan yang sama, yaitu apabila konstruksi dan pembebanan cukup kompleks. Metode "Bidang Momen Sebagai Beban" ini pun dirasa lebih praktis dibanding dengan metode yang dibahas sebelumnya.

Metode ini pada hakekatnya berdasar sama dengan metode luas bidang momen, hanya sedikit terdapat perluasan. Untuk membahas masalah ini kita ambil sebuah konstruksi seperti tergambar pada gambar 2.12, dengan beban titik P, kemudian momen dianggap sebagai beban.

Dari gambar 6.12, W adalah luas bidang momen, yang besarnya

$$W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \frac{Pab}{L} = \frac{Pab}{2}$$

Berdasarkan definisi II yang telah dibahas pada metode luas bidang momen, maka didapat:

$$\delta_1 = \frac{\text{Statis momen luas bidang momen terhadap B}}{EI}$$

$$\delta_1 = \left(\frac{Pab}{2} \right) \left(\frac{1}{3} (L + b) \right) \frac{1}{EI}$$

$$\delta_1 = \frac{Pab(L + b)}{6EI}$$

Pada umumnya lendutan yang terjadi cukup kecil, maka berdasarkan pendekatan geometris akan diperoleh :

$$\delta_1 = \theta_A \cdot L \quad \text{atau} \quad \phi_A = \frac{\delta_1}{L}$$

$$\phi_A = \frac{Pab(L + b)}{6EIL} = \frac{R_A}{EI}$$

Dengan cara yang sama akan dihasilkan :

$$\phi_B = \frac{Pab(L + a)}{6EIL} = \frac{R_B}{EI}$$

Dengan demikian dapat diambil kesimpulan bahwa : Sudut tangen di A dan B besarnya sama dengan reaksi perletakan dibagi EI.

Berdasarkan gambar 2.12 sebenarnya yang akan dicari adalah defleksi pada titik C sejauh x meter dari dukungan A (potongan i-j-k) yaitu sebesar Zc.

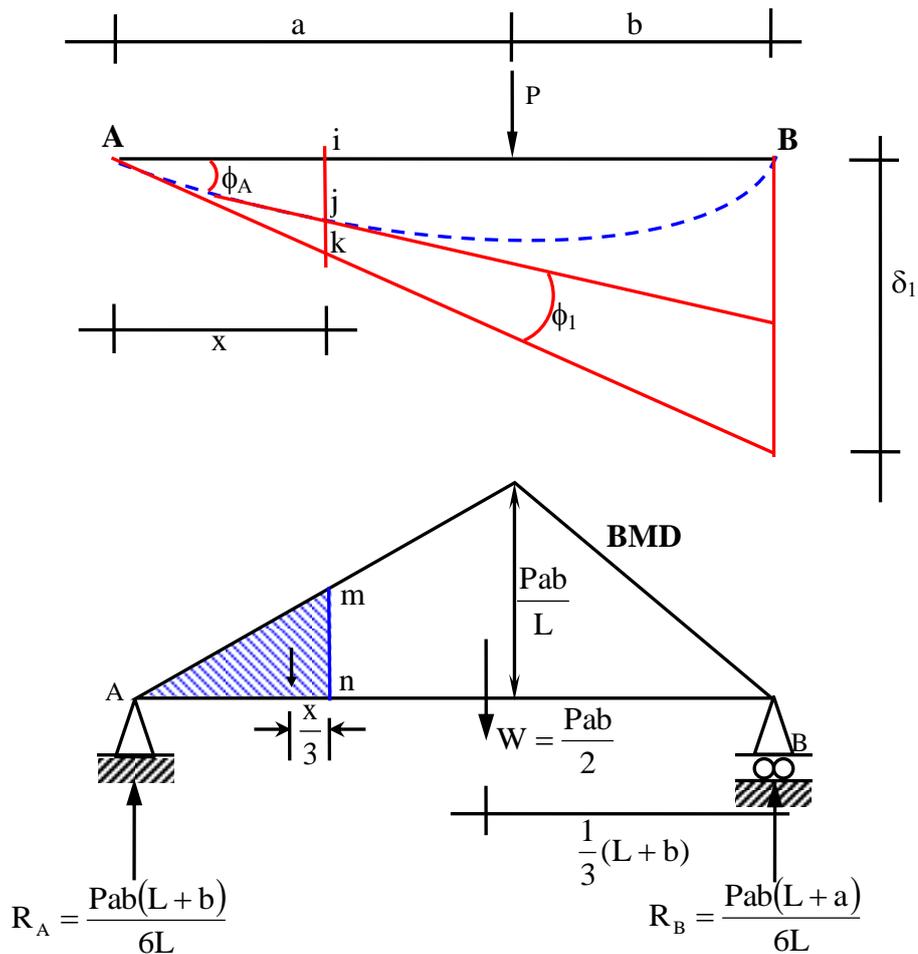
$$Z_c = ij = ik - jk$$

Berdasarkan geometri, maka besarnya $ik = \phi_A \cdot x$, maka

$$ik = \frac{R_A}{EI} x$$

Sedangkan berdasarkan definisi II adalah statis momen luasan A-m-n terhadap bidang m-n dibagi EI, maka

$$jk = \frac{\text{luas } A-m-n \cdot \frac{x}{3}}{EI}$$



Gambar 2.12. Konstruksi Balok Sederhana dan Garis Elastika

Sehingga lendutan Z_C yang berjarak x dari A, adalah :

$$Z_C = ij = ik - jk$$

$$Z_C = \frac{1}{EI} \left(R_A x - \text{luas } A-m-n \cdot \frac{x}{3} \right) \quad (2.8)$$

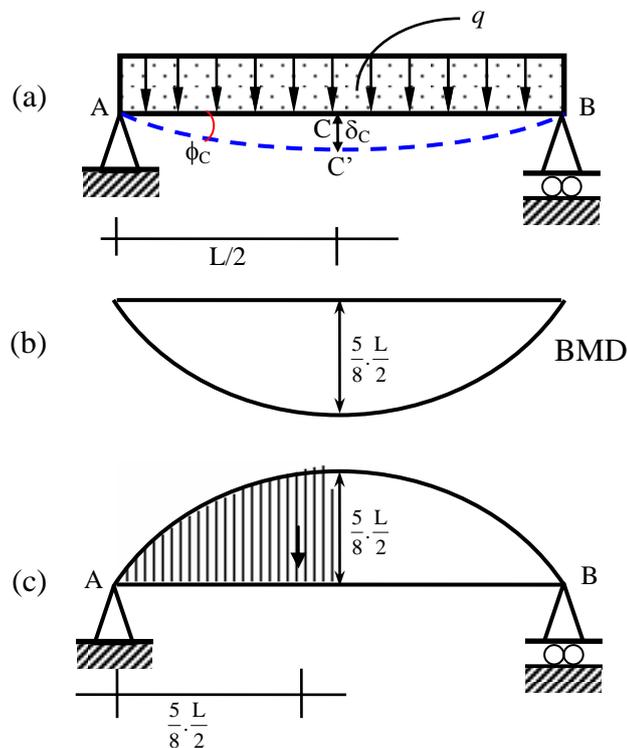
Berdasarkan persamaan 2.8 didapat definisi III sebagai berikut :

Definisi III : Lendutan disuatu titik didalam suatu bentangan balok sederhana besarnya sama dengan momen di titik tersebut dibagi dengan EI apabila bidang momen sebagai beban.

Untuk mempermudah pemahaman tentang pemakaian metode luas bidang momen sebagai beban, akan dicoba diaplikasikan pada struktur balok sederhana.

Contoh 2.9. Balok Sederhana dengan Beban Merata

Hitung defleksi maksimum (δ_C) yang terjadi pada struktur balok sederhana yang menahan beban merata, sebagaimana digambarkan pada gambar 2.13, dengan metode luas bidang momen sebagai beban.



Gambar 2.13. Balok sederhana yang menahan beban merata

Penyelesaian :

Langkah untuk menyelesaikan permasalahan ini adalah mencari momen terlebih dahulu, hasilnya sebagaimana digambarkan pada gambar 2.13.b. Hasil momen tersebut kemudian dijadikan beban, sebagaimana diperlihatkan pada gambar 2.13.c. Kemudian dicari atau dihitung besarnya reaksi dan momennya. Besarnya θ_A adalah sebesar R_A

akibat beban momen dibagi dengan EI, sedangkan θ_B adalah sebesar R_B akibat beban momen dibagi dengan EI, dan besarnya δ_{\max} adalah sebesar M_C akibat beban momen dibagi dengan EI. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada penyelesaian dibawah ini.

Berdasarkan gambar 2.13.a. didapat momen sebagaimana digambarkan pada gambar

2.13.b, yang besarnya sebesar $M_C = \frac{1}{8}qL^2$

Dari bidang momen yang didapat pada gambar 2.13.b dibalik dan dijadikan beban sebagaimana digambarkan pada gambar 2.13.c. Dari gambar 2.13.c didapat reaksi yang besarnya :

$$R_A = R_B = \left(\frac{1}{8}qL^2\right) \frac{2}{3} \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{24}qL^3 \text{ (besarnya sama dengan } Amn = W)$$

Dengan demikian sudut kelengkunganannya dapat dihitung, yaitu sebesar :

$$\phi_A = \phi_B = \frac{R_A}{EI} = \frac{qL^3}{24EI}$$

Dari gambar 2.13.c. didapat juga momen dititik C, yaitu sebesar :

$$M_C = \frac{qL^3}{23} \cdot \frac{L}{2} - \frac{qL^3}{24} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{L}{2} = \frac{5qL^4}{384}$$

Besanya δ_{\max} dapat dihitung yaitu sebesar :

$$\delta_C = \frac{M_C}{EI}$$

$$\delta_C = \frac{5qL^4}{384EI}$$

B. Deformasi

Deformasi (perubahan bentuk) balok disebabkan oleh beberapa faktor, diantaranya adalah : Akibat beban luar yang bekerja (seperti beban merata, terpusat, segitiga, dan sebagainya), momen pada salah satu ujung balok, dan perpindahan (translasi) relatif ujung balok terhadap ujung balok yang lain.

1. Deformasi Akibat Beban Merata

Deformasi yang terjadi pada struktur balok yang menahan beban merata sebagaimana digambarkan pada gambar 2.14, dapat dihitung dengan metode luas bidang momen sebagai beban.

Besarnya momen maksimum (di tengah bentang) akibat beban merata sebesar $M_{\max} = \frac{1}{8}qL^2$. Dari hasil tersebut digambarkan bidang momennya berupa BMD (*Bending Moment Diagram*), seperti gambar 2.14b, kemudian BMD tersebut dipergunakan sebagai beban, seperti gambar 2.14c, sehingga didapat reaksi perletakan pada tumpuan A dan B, yaitu sebesar luas bidang momen tersebut dibagi dua :

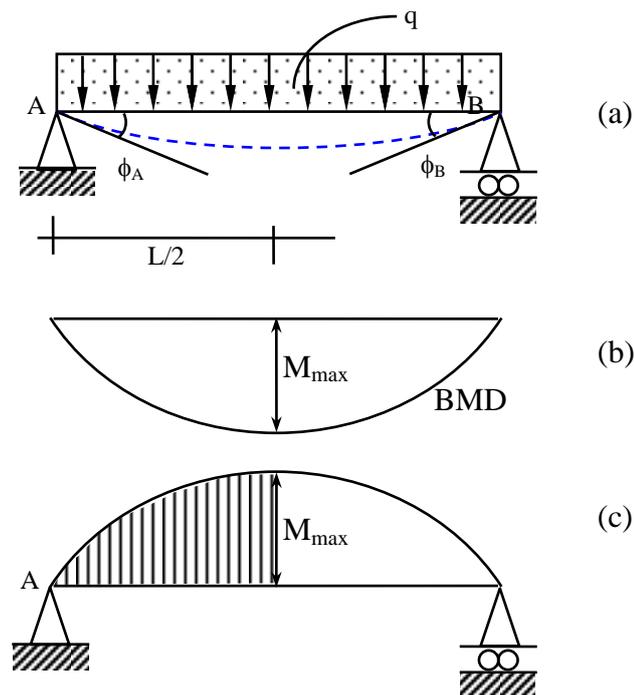
$$R_A = R_B = \frac{\text{Luas bidang momen}}{2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}qL^2 \cdot L}{2} = \frac{qL^3}{24}$$

Besarnya sudut di titik A dan B yaitu sebesar :

$$\phi_A = \frac{R_A}{EI} = \frac{qL^3}{24EI}$$

$$\phi_B = -\frac{R_B}{EI} = -\frac{qL^3}{24EI}$$

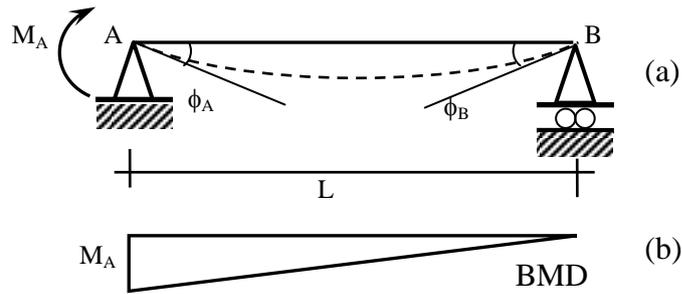
dengan E adalah Modulus Elastis dan I adalah Momen Inersia.



Gambar 2.14. Balok sederhana yang menahan beban merata

2. Deformasi Akibat Momen Pada Salah Satu Ujung Balok

Struktur balok yang menahan beban momen di ujung A sebagaimana digambarkan pada gambar 2.15. didapat bidang momennya berupa BMD.



Gambar 2.15. Balok sederhana yang menahan beban momen di Ujung A

BMD tersebut, dipergunakan sebagai beban sehingga didapat reaksi perletakan pada tumpuan A dan B, yaitu sebesar:

$$R_A = \frac{2}{3} \text{Luas bidang momen} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot L \cdot M_A = \frac{M_A \cdot L}{3}$$

$$R_B = \frac{1}{3} \text{Luas bidang momen} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot L \cdot M_A = \frac{M_A \cdot L}{6}$$

Besarnya sudut di titik A dan B yaitu sebesar :

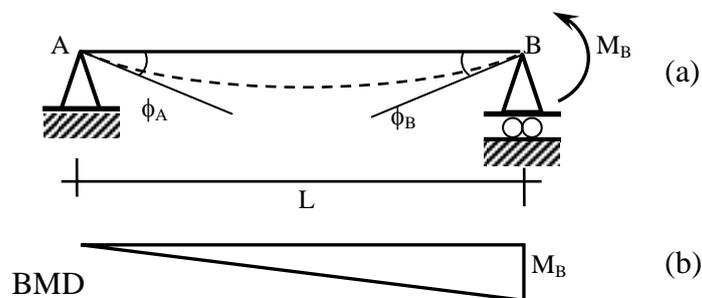
$$\phi_A = \frac{R_A}{EI} = \frac{M_A L}{3EI}$$

$$\phi_B = -\frac{R_B}{EI} = -\frac{M_A L}{6EI}$$

Jika beban momen terletak pada ujung B sebagaimana tergambar pada gambar 2.16, maka besarnya sudut di titik A dan B yaitu sebesar :

$$\phi_A = \frac{R_A}{EI} = \frac{M_B L}{6EI}$$

$$\phi_B = -\frac{R_B}{EI} = -\frac{M_B L}{3EI}$$

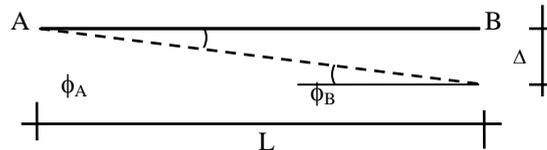


Gambar 2.16. Balok sederhana yang menahan beban momen di Ujung B

3. Deformasi Akibat Perpindahan (Translasi).

Jika suatu balok mengalami perpindahan ujung sebesar Δ sebagaimana pada gambar 2.17, maka besarnya sudut di titik A dan B yaitu sebesar :

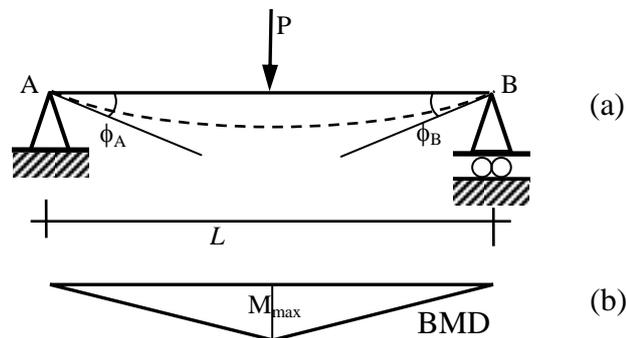
$$\phi_A = \phi_B = \frac{\Delta}{L}$$



Gambar 2.17. Balok yang mengalami translasi terhadap ujung yang lain

4. Deformasi Akibat Beban Terpusat di Tengah Bentang

Deformasi yang terjadi pada struktur balok yang menahan beban terpusat di tengah bentang digambarkan sebagaimana pada gambar 2.18, dapat dihitung dengan metode luas bidang momen sebagai beban.



Gambar 2.18. Balok sederhana yang menahan beban merata

Besarnya momen maksimum (di tengah bentang) akibat beban merata sebesar $M_{\max} = PL/4$. Dari hasil tersebut digambarkan bidang momennya berupa BMD, kemudian BMD tersebut dipergunakan sebagai beban sehingga didapat reaksi perletakan pada tumpuan A dan B, yaitu sebesar luas bidang momen tersebut dibagi dua :

$$R'_A = R'_B = \frac{\text{Luas bidang momen}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{PL}{4} \cdot L}{2} = \frac{PL^2}{16}$$

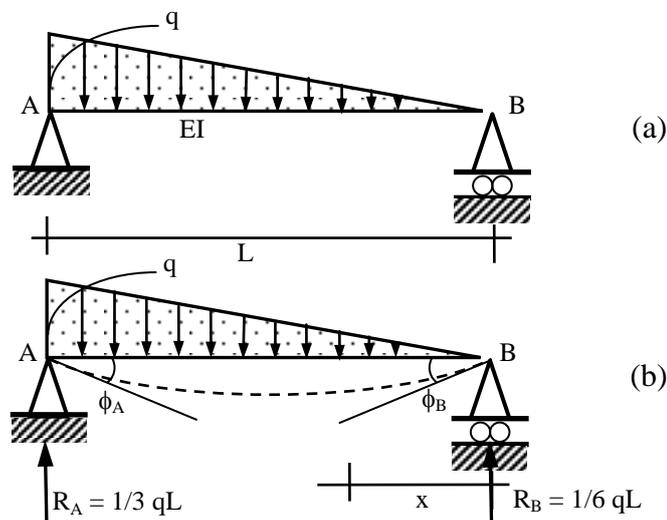
Besarnya sudut di titik A dan B yaitu sebesar :

$$\phi_A = \frac{R'_A}{EI} = \frac{qL^3}{16EI}$$

$$\phi_B = -\frac{R'_B}{EI} = -\frac{qL^3}{16EI}$$

5. Deformasi Akibat Beban Segitiga

Deformasi yang terjadi pada struktur balok yang menahan beban segitiga digambarkan sebagaimana pada gambar 2.19. Metode yang relatif lebih mudah adalah dengan *metode integrasi ganda*.



Gambar 2.19. Balok sederhana yang menahan beban merata

Besarnya momen akibat beban segitiga sebesar

$$\begin{aligned} M_x &= R_B \cdot x - q_x \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x \\ &= \frac{1}{6} qL \cdot x - \frac{q \cdot x}{L} \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x \\ &= \frac{1}{6} qL \cdot x - \frac{1}{6} \frac{q \cdot x^3}{L} \end{aligned}$$

Besarnya :

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -M_x = \frac{1}{6} \frac{q \cdot x^3}{L} - \frac{1}{6} qL \cdot x$$

Integrasi I :

$$\begin{aligned}EI \cdot \frac{dy}{dx} &= \int \left(\frac{1}{6} \frac{q \cdot x^3}{L} - \frac{1}{6} qL \cdot x \right) dx \\ &= \frac{1}{24} \frac{q \cdot x^4}{L} - \frac{1}{12} qL \cdot x^2 + C_1\end{aligned}$$

Integrasi II :

$$\begin{aligned}EI \cdot y &= \int \left(\frac{1}{24} \frac{q \cdot x^4}{L} - \frac{1}{12} qL \cdot x^2 + C_1 \right) dx \\ &= \frac{1}{120} \frac{q \cdot x^5}{L} - \frac{1}{36} qL \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan tersebut :

Jika $x = 0$ maka $y = 0$, sehingga didapat $C_2 = 0$

Jika $x = L$ maka $y = 0$, sehingga didapat $0 = \frac{1}{120} \frac{qL^5}{L} - \frac{1}{36} qL \cdot L^3 + C_1 \cdot L + C_2$

$$C_1 = \frac{7}{360} qL^3$$

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{24} \frac{q \cdot x^4}{L} - \frac{1}{12} qL \cdot x^2 + \frac{7}{360} qL^3$$

Nilai x dihitung dari B ke A, sehingga ϕ_B terletak pada $x = 0$, pada titik tersebut $y = 0$.

Sedangkan ϕ_A terletak pada $x = L$, dan pada titik tersebut $y = 0$. Jika x dan y tersebut disubstitusi kedalam persamaan di atas maka nilai ϕ_A dan ϕ_B akan didapat.

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{24} \frac{q \cdot L^4}{L} - \frac{1}{12} qL \cdot L^2 + \frac{7}{360} qL^3$$

$$EI \cdot \phi_A = \frac{q \cdot L^3}{24} - \frac{q \cdot L^3}{12} + \frac{7q \cdot L^3}{360}$$

$$EI \cdot \phi_A = -\frac{qL^3}{24} + \frac{7qL^3}{360}$$

$$= -\frac{15qL^3}{360} + \frac{7qL^3}{360}$$

$$= -\frac{8qL^3}{360}$$

$$\phi_A = -\frac{8}{360} \frac{qL^3}{EI}$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{1}{24} \frac{q \cdot 0^4}{L} - \frac{1}{12} qL \cdot 0^2 + \frac{7}{360} qL^3$$

$$EI \phi_B = \frac{1}{24} \frac{q \cdot 0^4}{L} - \frac{1}{12} qL \cdot 0^2 + \frac{7}{360} qL^3$$

$$\phi_B = \frac{7}{360} \frac{qL^3}{EI}$$

Untuk kondisi balok dengan pembebanan yang lain, hasilnya dipaparkan pada Tabel 2.1.

Contoh 2.10

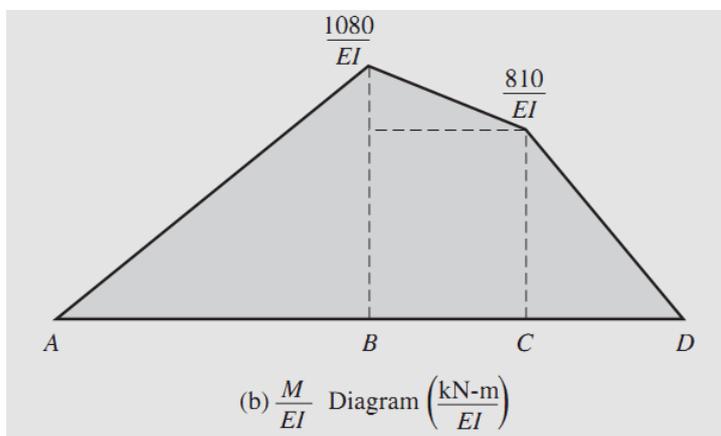
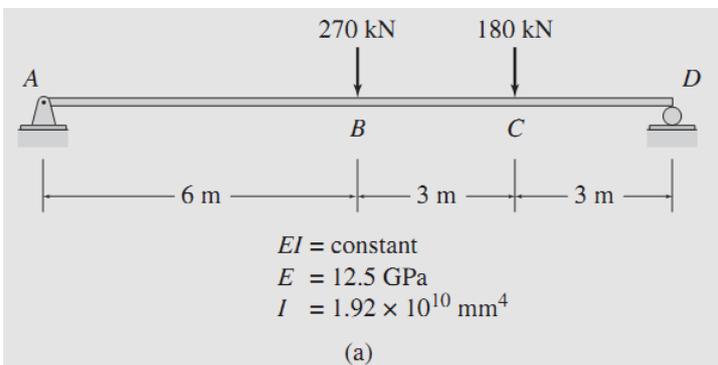
Use the moment-area method to determine the slopes at ends *A* and *D* and the deflections at points *B* and *C* of the beam shown in Fig. 6.6(a).

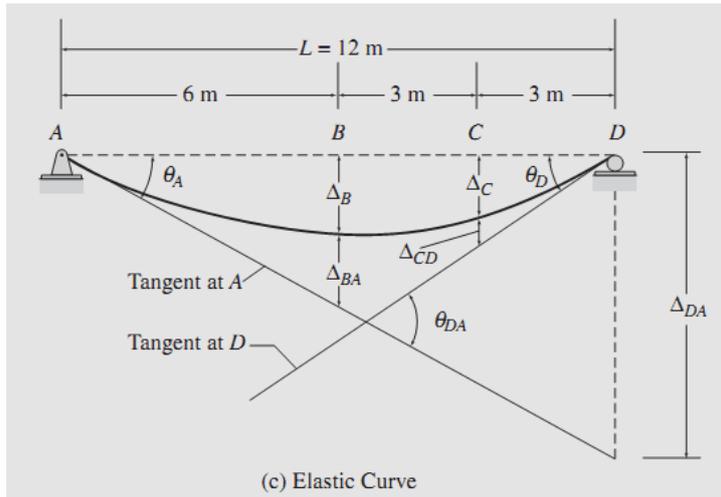
Solution

M/EI Diagram Because *EI* is constant along the length of the beam, the shape of the *M/EI* diagram is the same as that of the bending moment diagram. The *M/EI* diagram is shown in Fig. 6.6(b).

Elastic Curve The elastic curve for the beam is shown in Fig. 6.6(c).

Slope at A The slope of the elastic curve is not known at any point on the beam, so we will use the tangent at support *A* as the reference tangent and determine its slope, θ_A , from the conditions that the deflections at the support points *A* and *D* are zero. From Fig. 6.6(c), we can see that





$$\theta_A = \frac{\Delta_{DA}}{L}$$

in which θ_A is assumed to be so small that $\tan \theta_A \approx \theta_A$. To evaluate the tangential deviation Δ_{DA} , we apply the second moment-area theorem:

Δ_{DA} = moment of the area of the M/EI diagram between A and D about D

$$\begin{aligned} \Delta_{DA} &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (1080)(6) \left(\frac{6}{3} + 6 \right) + \frac{1}{2} (270)(3) \left(\frac{6}{3} + 3 \right) \right. \\ &\quad \left. + 810(3)(4.5) + \frac{1}{2} (810)(3) \left(\frac{6}{3} \right) \right] \\ &= \frac{41310 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \end{aligned}$$

Therefore, the slope at A is

$$\theta_A = \frac{\Delta_{DA}}{L} = \frac{41310/EI}{12} = \frac{3442.5 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

Substituting the numerical values of E and I , we obtain

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{3442.5}{(12.5 \times 10^6)(1.92 \times 10^{-2})} = 0.014 \text{ rad} \\ \theta_A &= 0.014 \text{ rad} \quad \swarrow \end{aligned}$$

Ans.

Slope at D From Fig. 6.6(c), we can see that

$$\theta_D = \theta_{DA} - \theta_A$$

in which, according to the first moment-area theorem,

$$\begin{aligned} \theta_{DA} &= \text{area of the } M/EI \text{ diagram between } A \text{ and } D \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (1080)(6) + \frac{1}{2} (270)(3) + 810(3) + \frac{1}{2} (810)(3) \right] \\ &= \frac{7290 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \theta_D &= \frac{7290}{EI} - \frac{3442.5}{EI} = \frac{3847.5 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \\ \theta_D &= \frac{3847.5}{(12.5 \times 10^6)(1.92 \times 10^{-2})} = 0.016 \text{ rad} \\ \theta_D &= 0.016 \text{ rad} \quad \swarrow \end{aligned}$$

Ans.

Deflection at B Considering the portion AB of the elastic curve in Fig. 6.6(c), and realizing that θ_A is so small that $\tan \theta_A \approx \theta_A$, we write

$$\theta_A = \frac{\Delta_B + \Delta_{BA}}{6}$$

from which

$$\Delta_B = 6\theta_A - \Delta_{BA}$$

continued

where

$$\begin{aligned} \Delta_{BA} &= \text{moment of the area of the } M/EI \text{ diagram between } A \text{ and } B \text{ about } B \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (1080)(6) \left(\frac{6}{3} \right) \right] \\ &= \frac{6480 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \Delta_B &= 6 \left(\frac{3442.5}{EI} \right) - \frac{6480}{EI} = \frac{14175 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \\ \Delta_B &= \frac{14175}{(12.5 \times 10^6)(1.92 \times 10^{-2})} = 59 \text{ mm} \\ \Delta_B &= 59 \text{ mm} \downarrow \end{aligned}$$

Ans.

Deflection at C Finally, considering the portion CD of the elastic curve in Fig. 6.6(c) and assuming θ_D to be small (so that $\tan \theta_D \approx \theta_D$), we write

$$\theta_D = \frac{\Delta_C + \Delta_{CD}}{3}$$

or

$$\Delta_C = 3\theta_D - \Delta_{CD}$$

where

$$\Delta_{CD} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (810)(3) \left(\frac{3}{3} \right) \right] = \frac{1215 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \Delta_C &= 3 \left(\frac{3847.5}{EI} \right) - \frac{1215}{EI} = \frac{10327.5 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \\ \Delta_C &= \frac{10327.5}{(12.5 \times 10^6)(1.92 \times 10^{-2})} = 43 \text{ mm} \\ \Delta_C &= 43 \text{ mm} \downarrow \end{aligned}$$

Ans.

Contoh 2.11.

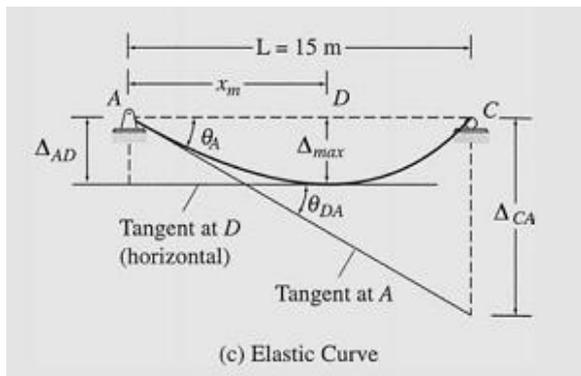
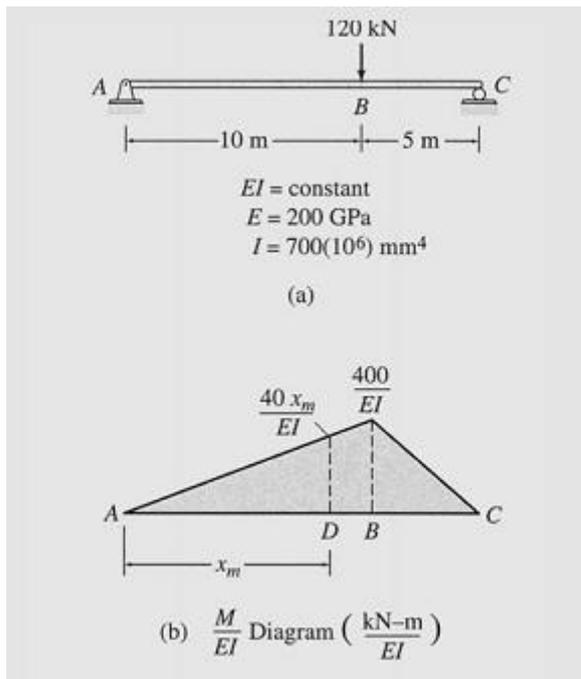
Determine the maximum deflection for the beam shown in Fig. 6.7(a) by the moment-area method.

Solution

M/EI Diagram The M/EI diagram is shown in Fig. 6.7(b).

Elastic Curve The elastic curve for the beam is shown in Fig. 6.7(c).

continued



Slope at A The slope of the elastic curve is not known at any point on the beam, so we will use the tangent at support A as the reference tangent and determine its slope, θ_A , from the conditions that the deflections at the support points A and C are zero. From Fig. 6.7(c), we can see that

$$\theta_A = \frac{\Delta_{CA}}{15}$$

To evaluate the tangential deviation Δ_{CA} , we apply the second moment-area theorem:

Δ_{CA} = moment of the area of the M/EI diagram between A and C about C

$$\begin{aligned}\Delta_{CA} &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2}(400)(10) \left(\frac{10}{3} + 5 \right) + \frac{1}{2}(400)(5) \left(\frac{10}{3} \right) \right] \\ &= \frac{20,000 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\end{aligned}$$

Therefore, the slope at A is

$$\theta_A = \frac{20,000/EI}{15} = \frac{1,333.33 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

Location of the Maximum Deflection If the maximum deflection occurs at point D , located at a distance x_m from the left support A (see Fig. 6.7(c)), then the slope at D must be zero; therefore,

$$\theta_{DA} = \theta_A = \frac{1,333.33 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

which indicates that in order for the slope at D to be zero (i.e., the maximum deflection occurs at D), the area of the M/EI diagram between A and D must be equal to $1,333.33/EI$. We use this condition to determine the location of point D :

$$\theta_{DA} = \text{area of the } \frac{M}{EI} \text{ diagram between } A \text{ and } D = \frac{1,333.33}{EI}$$

or

$$\frac{1}{2} \left(\frac{40x_m}{EI} \right) x_m = \frac{1,333.33}{EI}$$

from which

$$x_m = 8.16 \text{ m}$$

Maximum Deflection From Fig. 6.7(c), we can see that

$$\Delta_{\max} = \Delta_{AD}$$

where

$$\begin{aligned}\Delta_{AD} &= \text{moment of the area of the } M/EI \text{ diagram between } A \text{ and } D \text{ about } A \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{40}{EI} \right) (8.16) (8.16) \left(\frac{2}{3} \right) (8.16) \\ &= \frac{7,244.51 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\end{aligned}$$

Therefore,

$$\Delta_{\max} = \frac{7,244.51 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

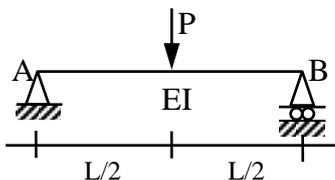
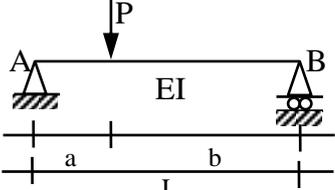
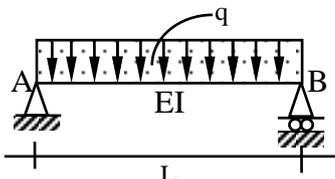
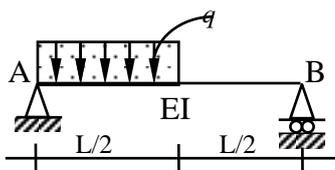
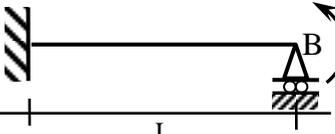
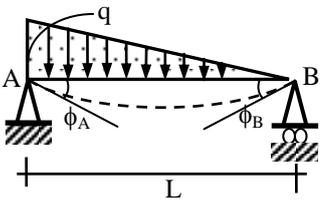
Substituting $E = 200 \text{ GPa} = 200(10^6) \text{ kN/m}^2$ and $I = 700(10^6) \text{ mm}^4 = 700(10^{-6}) \text{ m}^4$, we obtain

$$\Delta_{\max} = \frac{7,244.51}{200(10^6)(700)(10^{-6})} = 0.0517 \text{ m}$$

$$\Delta_{\max} = 51.7 \text{ mm} \downarrow$$

Ans.

Tabel 2.1. Rumus-rumus Deformasi Ujung Balok Akibat Beban Luar

Gambar Pembebanan Struktur	Deformasi Ujung A	Deformasi Ujung B
	$\phi_A = \frac{PL^3}{16EI}$	$\phi_B = -\frac{PL^3}{16EI}$
	$\phi_A = \frac{P \cdot b \cdot (L^2 - b^2)}{6EIL}$	$\phi_B = -\frac{P \cdot a \cdot (L^2 - a^2)}{6EIL}$
	$\phi_A = \frac{qL^3}{24EI}$	$\phi_B = -\frac{qL^3}{24EI}$
	$\phi_A = \frac{9qL^3}{384EI}$	$\phi_B = -\frac{7qL^3}{384EI}$
	$\phi_A = 0$	$\phi_B = -\frac{ML}{4EI}$
	$\phi_A = \frac{ML}{3EI}$	$\phi_B = -\frac{ML}{6EI}$
	$\phi_A = \frac{8}{360} \frac{qL^3}{EI}$	$\phi_B = -\frac{7}{360} \frac{qL^3}{EI}$

C. Soal Latihan

Hitung dan Gambarkan SFD dan BMD nya struktur tergambar dibawah ini.

