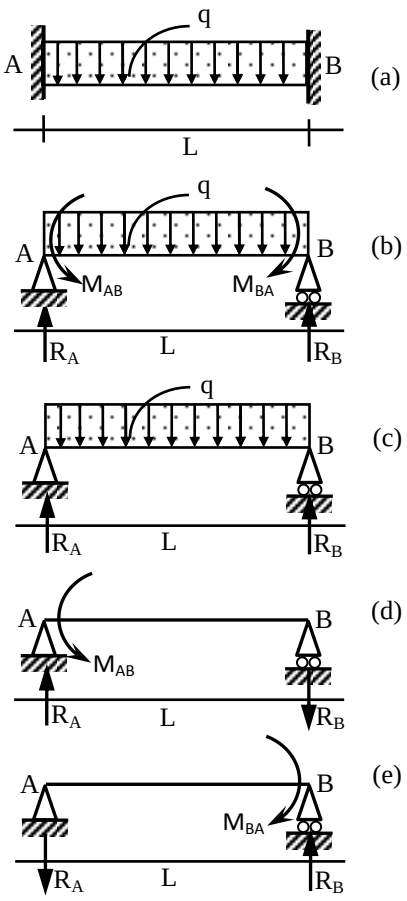
# BAB IV
# BALOK STATIS TAK TENTU

## A. Konsep Dasar

Struktur statis tertentu terjadi dikarenakan adanya kelebihan jumlah komponen reaksi perletakannya lebih besar dari pada jumlah persamaan keseimbangan statisnya. Agar struktur tersebut dapat diselesaiakan maka dapat dirubah menjadi stuktur statis tertentu. Akibat perubahan tersebut, maka gaya kelebihan yang terjadi dapat digantikan dengan momen pimer, yang dianggap sebagai beban momen.

Sebagai contoh struktur terkekang dengan beban merata penuh sebagaimana tergambar pada gambar 4.1a, dapat dirubah menjadi struktur statis tertentu seperti pada gambar 4.1b. Akibat adanya perubahan tumpuan jepit menjadi sendi atau rol, maka pada tumpuan tersebut terdapat beban momen, yang besarnya sama dengan momen primer. Agar penyelesaiannya lebih mudah, maka struktur yang tergambar pada gambar 4.1b tersebut dapat dipisah-pisah lagi menjadi 3 (tiga) struktur sederhana (*simple beam*) sebagaimana tergambar pada gambar 4.1c dan gambar 4.1d serta gambar 4.1e. Dalam penyelesaiannya struktur tersebut dihitung sendiri-sendiri, baik reaksi, gaya lintang maupun momennya, kemudian hasil akhir merupakan penjumlahan dari 3 (tiga) struktur tersebut. Gambar 4.1.b, merupakan struktur sederhana yang menahan beban merata, momen di A dan momen di B. Sedangkan gambar 4.1c. struktur yang menahan beban merata saja, gambar 4.1d, yang menahan beban momen di A, dan gambar 4.1e, yang menahan momen di B.




Gambar 4,1. Balok Terkekang dengan Beban Merata Penuh

**B. Struktur Terkekang dengan Beban Merata Penuh**

Struktur terkekang dengan beban merata penuh sebagaimana gambar 4.1a, dapat diselesaikan dengan cara dirubah menjadi struktur statis tertentu, sebagaimana dijelaskan pada sub bab A.

1. Reaksi dan Gaya Lintang

Reaksi perletakan merupakan jumlah dari reaksi perletakan akibat beban merata dari gambar 4.1.c, akibat beban momen dari gambar 4.1d, dan akibat momen dari gambar 4.1e. Besarnya Momen Primer diambil dari Tabel 3.1, yaitu sebesar :

$$M_{AB} = -\frac{q.L^2}{12}$$

$$M_{BA} = \frac{q.L^2}{12}$$

Reaksi akibat beban merata (gambar 4.1c) :

$$R_A = R_B = \frac{qL}{2}$$

Reaksi akibat momen di A (gambar 4.1d) :

$$R_A = \frac{M_{AB}}{L} = \frac{q.L}{12}$$

$$R_B = -\frac{M_{AB}}{L} = -\frac{q.L}{12}$$

Reaksi akibat momen di B (gambar 4.1e)

$$R_A = -\frac{M_{BA}}{L} = -\frac{q.L}{12}$$

$$R_B = \frac{M_{BA}}{L} = \frac{q.L}{12}$$

Dengan demikian reaksi di A dan B, sebagai berikut :

$$R_A = \frac{qL}{2} + \frac{q.L}{12} - \frac{q.L}{12} = \frac{qL}{2}$$

$$R_B = \frac{qL}{2} - \frac{q.L}{12} + \frac{q.L}{12} = \frac{qL}{2}$$

Berdasarkan hasil reaksi tersebut gaya lintang dapat digambar sebagaimana gambar 4.2a, yang berupa diagram gaya lintang (*Shearing Force Diagram*), disingkat SFD.

2. Momen

Momen merupakan gabungan dari hasil momen akibat beban merata dari gambar 4.1.c, akibat beban momen dari gambar 4.1d, dan akibat momen dari gambar 4.1e. Momen maksimum akan terjadi pada SFD sama dengan nol, berdasarkan gambar 4.2a terletak di tengah bentang.

Momen akibat beban merata (gambar 4.1c) :

$$M_A = M_B = 0$$

$$M_T = R_A \cdot \frac{L}{2} - q.\frac{L}{2}.\frac{L}{4}$$

$$= \frac{qL}{2}.\frac{L}{2} - \frac{qL^2}{8}$$

$$= \frac{qL^2}{8}$$

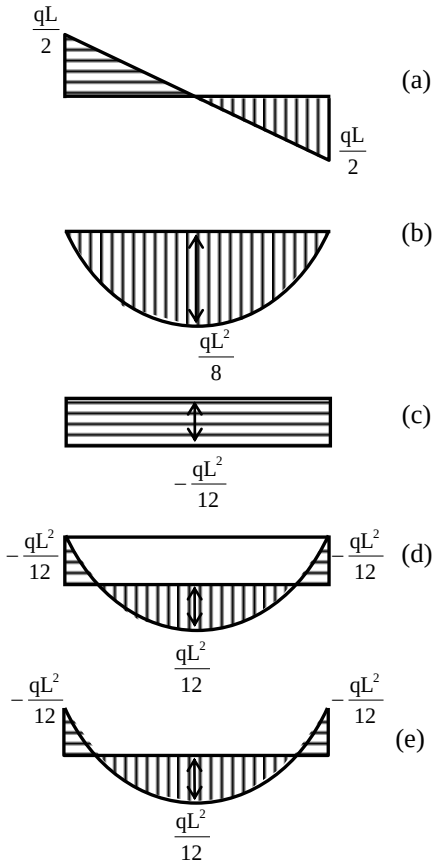
Hasil momen dapat digambarkan sebagaimana gambar 4.2.b. yang berupa diagram momen lentur (*Bending Momen Diagram*), disingkat BMD.

Momen akibat beban momen di A dan B (gambar 4.1c dan gambar 4.1d) dapat dihitung bersamaan dan hasilnya digambarkan pada gambar 4.2.c.

$$M_A = M_B = -\frac{q.L^2}{12}$$

Momen di tengah bentang besarnya sama dengan $M_A$ dan $M_B$ sehingga didapat :

$$M_T = -\frac{q.L^2}{12}$$




Gambar 4,2. SFD dan BMD

Gabungan akibat beban merata dan momen dapat digambarkan sebagaimana gambar 4.2.d, dan jika disederhanakan maka hasilnya sebagaimana gambar 4.2.e, besarnya momen yaitu :

$$M_A = M_B = -\frac{q.L^2}{12}$$

$$M_T = M_{max} = \frac{qL^2}{8} - \frac{q.L^2}{12} = \frac{q.L^2}{24}$$

**C. Struktur Terkekang dengan Beban Merata Sebagian**

Struktur terkekang dengan beban merata sebagian sebagaimana gambar 4.3a, merupakan stuktur statis tak tentu. Agar struktur tersebut dapat diselesaiakan maka dapat dirubah menjadi stuktur statis tertentu. Akibat perubahan tersebut, maka gaya kelebihan yang terjadi dapat digantikan dengan momen pimer, sebagaimana tergambar pada gambar 4.3b. Dengan demikian struktur tersebut sudah menjadi struktur statis tertentu dengan beban merata dan beban momen di ujungnya. Untuk mempermudah penyelesainnya maka struktur tersebut dapat dipisah-pisah menjadi struktur sederhana sebagaimana tergambar pada gambar 4.3c, gambar 4.3d dan gambar 4.3e.

**1. Reaksi dan Gaya Lintang**

Reaksi perletakan merupakan jumlah dari reaksi perletakan akibat beban merata dari gambar 4.3.c, akibat beban momen dari gambar 4.3d, dan akibat momen dari gambar 4.3e. Besarnya Momen Primer diambil dari Tabel 3.1, yaitu sebesar :

$$M_{AB} = -\frac{11}{192}qL^2$$

$$M_{BA} = \frac{5}{192}qL^2$$

Reaksi akibat beban merata sebagian (gambar 4.3c) :

$$\sum M_B = 0$$

$$R_A \,.\, L - q \,.\, \frac{L}{2} \,.\, \frac{3}{2}L = 0$$

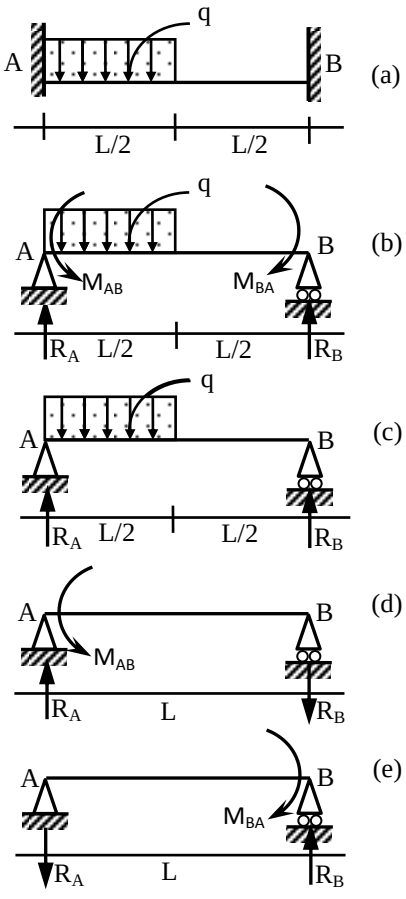
$$R_A = \frac{3}{8}qL$$

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B = \frac{1}{8}qL$$

Reaksi akibat momen di A (gambar 4.3d) :

$$R_A = \frac{M_{AB}}{L} = \frac{11}{192}qL$$




Gambar 4.3. Balok Terkekang dengan Beban Merata Sebagian

$$R_B = -\frac{M_{AB}}{L} = -\frac{11}{192}qL$$

Reaksi akibat momen di B (gambar 4.3e)

$$R_A = -\frac{M_{BA}}{L} = -\frac{5}{192}qL$$

$$R_B = \frac{M_{BA}}{L} = \frac{5}{192}qL$$

Dengan demikian reaksi di A dan B, sebagai berikut :

$$R_A = \frac{3}{8}qL + \frac{11}{192}qL - \frac{5}{192}qL = \frac{13}{32}qL$$

$$R_B = \frac{1}{8}qL - \frac{11}{192}qL + \frac{5}{192}qL = \frac{3}{32}qL$$

Berdasarkan hasil reaksi tersebut gaya lintang dapat digambar sebagaimana gambar 4.4a, yang berupa diagram gaya lintang (*Shearing Force Diagram*), disingkat SFD.

**2. Momen**

Momen merupakan gabungan dari hasil momen akibat beban merata dari gambar 4.3.c, akibat beban momen dari gambar 4.3d, dan akibat momen dari gambar 4.3e. Momen maksimum akan terjadi pada SFD sama dengan nol, yaitu terletak pada x dari A. Berdasarkan gambar 4.4a jarak sebagai berikut :

$$SF_X = 0$$

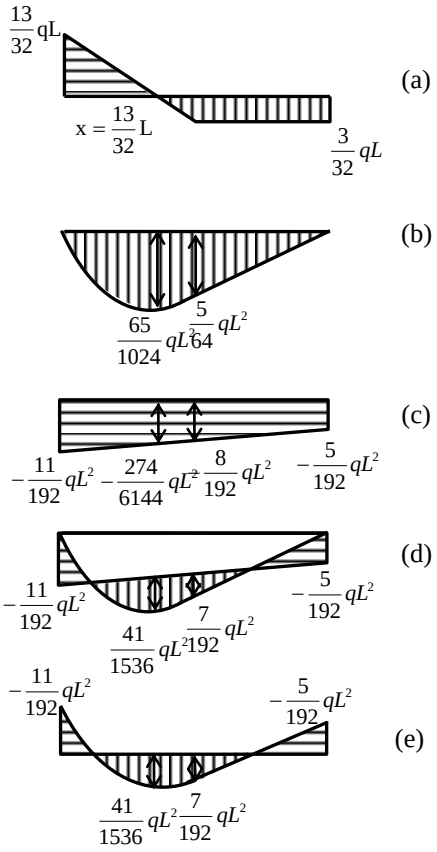
$$\frac{13}{32}qL - qx = 0$$

$$x = \frac{13}{32}L$$

Momen akibat beban merata (gambar 4.3c) :

$$M_A = M_B = 0$$

$$M_T = R_A \cdot \frac{L}{2} - q.\frac{L}{2}.\frac{L}{4}$$




Gambar 4.4. SFD dan BMD

$$= \frac{13}{32}qL \cdot \frac{L}{2} - \frac{qL^2}{8}$$

$$= \frac{5}{64}qL^2$$

$$M_x = R_A \cdot \frac{13}{32}L - q \cdot \frac{13}{32}L \cdot \frac{L}{4}$$

$$= \frac{13}{32}qL \cdot \frac{13}{32}L - \frac{13}{128}qL^2$$

$$= \frac{65}{1024}qL^2$$

Hasil momen dapat digambarkan sebagaimana gambar 4.4b. yang berupa diagram momen lentur (*Bending Momen Diagram*), disingkat BMD.

Momen akibat beban momen di A dan B (gambar 4.3c dan gambar 4.3d) dapat digambarkan seperti pada gambar 4.4c.

$$M_A = -\frac{11}{192}qL^2$$

$$M_B = -\frac{5}{192}qL^2$$

$$M_T = -\frac{5}{192}qL^2 - \frac{\left(\frac{11}{192}qL^2 - \frac{5}{192}qL^2\right)\left(\frac{L}{2}\right)}{L}$$

$$= -\frac{5}{192}qL^2 - \left(\frac{6}{192}qL^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= -\frac{8}{192}qL^2$$

$$M_X = -\frac{5}{192}qL^2 - \frac{\left(\frac{11}{192}qL^2 - \frac{5}{192}qL^2\right)\left(L - \frac{13}{32}L\right)}{L}$$

$$= -\frac{5}{192}qL^2 - \left(\frac{6}{192}qL^2\left(1 - \frac{13}{32}\right)\right)$$

$$= -\frac{160}{6144}qL^2 - \frac{114}{6144}qL^2$$

$$= -\frac{274}{6144}qL^2$$

Gabungan akibat beban merata dan momen dapat digambarkan sebagaimana gambar 4.4.d, dan jika disederhanakan maka hasilnya sebagaimana gambar 4.4.e, besarnya momen yaitu :

$$M_A = -\frac{11}{192}qL^2$$

$$M_B = -\frac{5}{192}qL^2$$

$$M_T = \frac{5}{64}qL^2 - \frac{8}{192}qL^2 = \frac{7}{192}qL^2$$

$$M_{max} = \frac{65}{1024}qL^2 - \frac{274}{6144}qL^2$$

$$= \frac{116}{6144}qL^2 = \frac{41}{1536}qL^2$$

Contoh 4.1. Jika diketahui struktur terjepit dengan beban merata sebagian seperti tergambar pada gambar 4.5.a, dengan beban q sebesar 8 kN/m dan panjang bentang sebesar 10 meter. Hitung dan gambarkan gaya lintang dan momennya.

Penyelesaian :

1. Reaksi dan Gaya Lintang

Reaksi perletakan merupakan jumlah dari reaksi perletakan akibat beban merata dari gambar 4.5.c, akibat beban momen dari gambar 4.5d, dan akibat momen dari gambar 4.5e. Besarnya Momen Primer diambil dari Tabel 3.1, yaitu sebesar :

$$M_{AB} = -\frac{11}{192}qL^2 = -\frac{11}{192}.8.10^2 = \ - \ 45{,}83$$

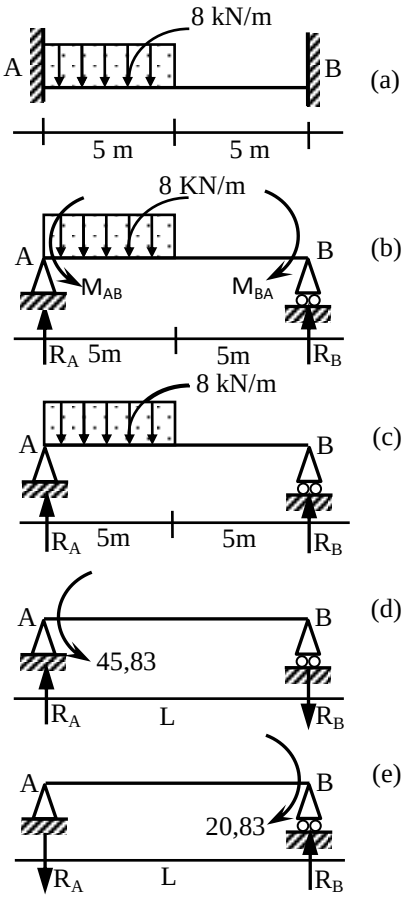
kNm

$$M_{BA} = \frac{5}{192}qL^2 = \frac{5}{192}.8.10^2 = 20{,}83 \text{ kNm}$$

Reaksi akibat beban merata sebagian (gambar 4.5c) :

$$\sum M_B = 0$$

$$R_A \,.\, 10 - 8.5.(5/2+5) = 0$$




Gambar 4.5. Balok Terkekang dengan Beban Merata Sebagian

$$R_A = \frac{300}{10} = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$- \quad R_B \,.\, 10 + 8.5.5/2 = 0$$

$$R_B = \frac{100}{10} = 10 \text{ kN}$$

Reaksi akibat momen di A (gambar 4.5d) :

$$R_A = \frac{M_{AB}}{L} = \frac{45{,}83}{10} = 4{,}58 \text{ kN}$$

$$R_B = -\frac{M_{AB}}{L} = -\frac{45{,}83}{10} = -4{,}58 \text{ kN}$$

Reaksi akibat momen di B (gambar 4.3e)

$$R_A = -\frac{M_{BA}}{L} = -\frac{20{,}83}{10} = -2{,}08 \text{ kN}$$

$$R_B = \frac{M_{BA}}{L} = \frac{20{,}83}{10} = 2{,}08 \text{ kN}$$

Dengan demikian reaksi di A dan B, sebagai berikut :

$R_A = 30 + 4{,}58 - 2{,}08 = 32{,}5$ kN

$R_B = 10 - 4{,}58 + 2{,}08 = 7{,}5$ kN

Berdasarkan hasil reaksi tersebut gaya lintang dapat digambar sebagaimana gambar 4.6a, yang berupa diagram gaya lintang (*Shearing Force Diagram*), disingkat SFD.

2. Momen

Momen merupakan gabungan dari hasil momen akibat beban merata dari gambar 4.5c, akibat beban momen dari gambar 4.5d, dan akibat momen dari gambar 4.5e. Momen maksimum akan terjadi pada SFD sama dengan nol, yaitu terletak pada x dari A. Berdasarkan gambar 4.6a jarak sebagai berikut :

$$SF_X = 0$$

$$32{,}5 - 8x = 0$$

$$x = \frac{32{,}5}{8} = 4{,}05 \text{ m}$$

Momen akibat beban merata (gambar 4.5c) :

$$M_A = M_B = 0$$

$$M_T = 30.5 - 8.5.5/2 = 50 \text{ kNm}$$

$M_x$ = 30.4,05 – 8.4,05.4,05/2 = 55,86 kNm

Hasil momen dapat digambarkan sebagaimana gambar 4.6b. yang berupa diagram momen lentur (*Bending Momen Diagram*), disingkat BMD.

Momen akibat beban momen di A dan B (gambar 4.5c dan gambar 4.5d) dapat digambarkan seperti pada gambar 4.6c.

$M_A$ = – 45,83 kNm

$M_B$ = – 20,83 kNm

$$M_T = -20{,}83 - \frac{(45{,}83 - 20{,}83)(5)}{10}$$

= – 33,33 kNm

$$M_X = -20{,}83 - \frac{(45{,}83 - 20{,}83)(4{,}05)}{10}$$

= – 30,98 kNm

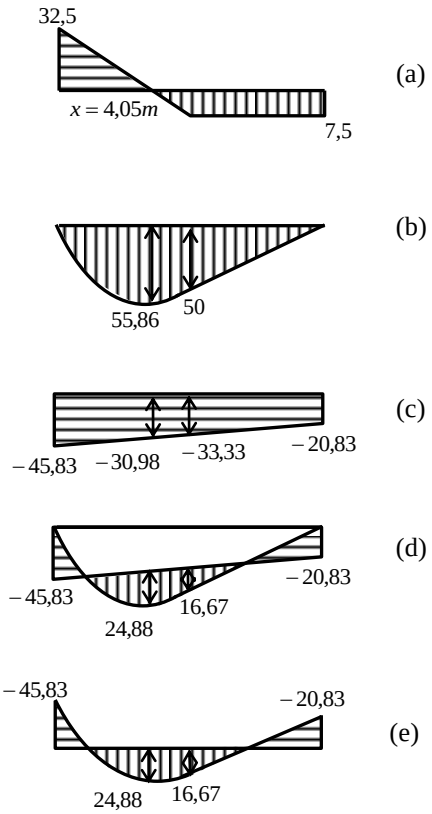
Gabungan akibat beban merata dan momen dapat digambarkan sebagaimana gambar 4.6d, dan jika disederhanakan maka hasilnya sebagaimana gambar 4.6e, besarnya momen yaitu :

$M_A$ = – 45,83 kNm

$M_B$ = – 20,83 kNm

$M_T$ = 50 – 33,33 = 16,67 kNm

$M_{max}$ = 55,86 – 30,98 = 24,88 kNm




Gambar 4.6. SFD dan BMD

**D. Struktur Terkekang dengan Satu Beban Terpusat**

Struktur terkekang dengan beban terpusat sebagaimana gambar 4.5a, merupakan stuktur statis tak tentu. Agar struktur tersebut dapat diselesaiakan maka dapat dirubah menjadi stuktur statis tertentu. Akibat perubahan tersebut, maka gaya kelebihan yang terjadi dapat digantikan dengan momen pimer, sebagaimana tergambar pada gambar 4.5b. Dengan demikian struktur tersebut sudah menjadi struktur statis tertentu dengan beban terpusat dan beban momen di ujungnya. Untuk mempermudah penyelesainnya maka struktur tersebut dapat dipisah-pisah menjadi struktur sederhana sebagaimana tergambar pada gambar 4.5c, gambar 4.5d dan gambar 4.5e.

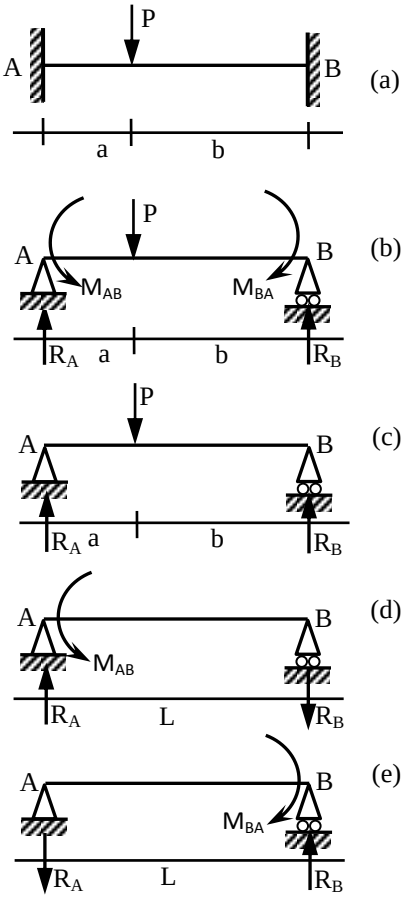
1. Reaksi dan Gaya Lintang

Reaksi perletakan merupakan jumlah dari reaksi perletakan akibat beban terpusat dari gambar 4.7c, akibat beban momen dari gambar 4.7d, dan akibat momen dari gambar 4.7e.

2. Momen

Momen merupakan gabungan dari hasil momen akibat beban merata dari gambar 4.7c, akibat beban momen dari gambar 4.7d, dan akibat momen dari gambar 4.7e.

Contoh 4.2. Jika struktur seperti tergambar pada gambar 4.7a, diketahui nilai beban terpusat P sebesar 40 kN, jarak a sebesar 2 meter dan b sebesar 6 meter. Hitung dan Gambarkan SFD, dan BMD nya.




Gambar 4.7. Balok Terkekang dengan Beban Terpusat

Penyelesaian :

Besarnya momen primer berdasarkan Tabel 3.1, sebesar :

$$M_{AB} = -\frac{P.a.b^2}{L^2} = -\frac{40.2.4^2}{8^2} = 20 \text{ kNm}$$

$$M_{BA} = \frac{P.a^2.b}{L^2} = \frac{40.2^2.4}{8^2} = 10 \text{ kNm}$$

Reaksi akibat beban terpusat (gambar 4.7c) :

$$R_A = \frac{Pb}{L} = \frac{40.4}{8} = 20 \text{ kN}$$

$$R_B = \frac{Pa}{L} = \frac{40.2}{8} = 10 \text{ kN}$$

Reaksi akibat momen di A (gambar 4.7d) :

$$R_A = \frac{M_{AB}}{L} = \frac{20}{8} = 2{,}25 \text{ kN}$$

$$R_B = -\frac{M_{AB}}{L} = -\frac{20}{8} = -2{,}25 \text{ kN}$$

Reaksi akibat momen di B (gambar 4.7e)

$$R_A = -\frac{M_{BA}}{L} = -\frac{10}{8} = -1{,}25 \text{ kN}$$

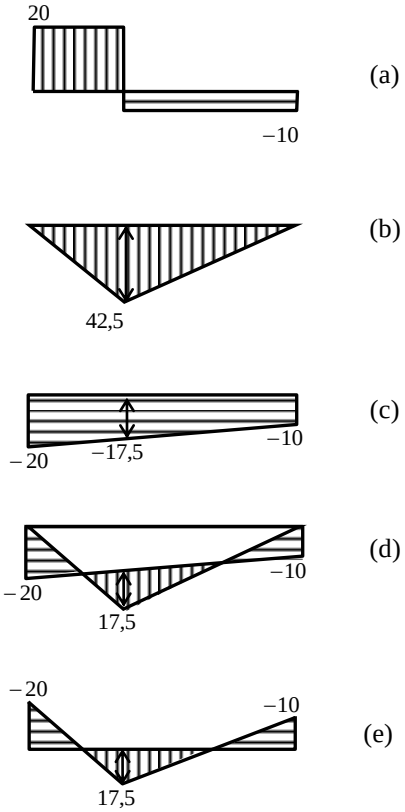
$$R_B = \frac{M_{BA}}{L} = \frac{10}{8} = 1{,}25 \text{ kN}$$

Dengan demikian reaksi di A dan B, sebagai berikut :

$R_A = 20 + 2{,}5 - 1{,}25 = 21{,}25$ kN

$R_B = 20 - 2{,}5 + 1{,}25 = 18{,}75$ kN

Berdasarkan hasil reaksi tersebut gaya lintang dapat digambar sebagaimana gambar 4.8a, yang berupa SFD.



Gambar 4.8. SFD dan BMD

Momen akibat beban terpusat (gambar 4.7c) :

$M_A = M_B = 0$

$M_{max} = R_A \,.\, a = 21{,}25 \,.\, 2 = 42{,}5$ kNm

Hasil momen dapat digambarkan sebagaimana gambar 4.8b.

Momen akibat beban momen di A dan B (gambar 4.7c dan gambar 4.7d) dapat digambarkan menjadi seperti pada gambar 4.8c.

$M_A = -20$ kNm

$M_B = -10$ kNm

$$M_{max} = -10 - \frac{(20-10)(6)}{8} = -17{,}5 \text{ KNm}$$

Gabungan akibat beban terpusat dan momen dapat digambarkan sebagaimana gambar 4.8d, dan jika disederhanakan maka hasilnya sebagaimana gambar 4.8e, besarnya momen yaitu :

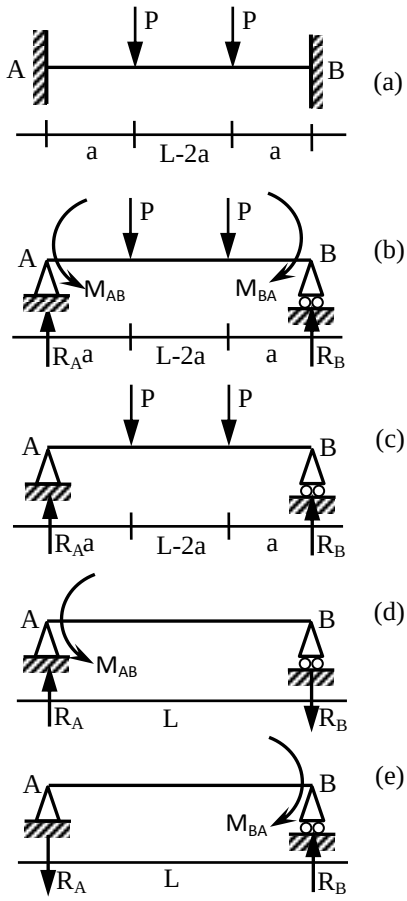
$M_A = -20$ kNm

$M_B = -10$ kNm

$M_{max} = 42{,}5 - 17{,}5 = 25$ kNm

**E. Struktur Terkekang dengan Dua Beban Terpusat**

Struktur terkekang dengan dua beban terpusat sebagaimana gambar 4.9a, merupakan stuktur statis tak tentu. Agar struktur tersebut dapat diselesaiakan maka dapat dirubah menjadi stuktur statis tertentu. Akibat perubahan tersebut, maka gaya kelebihan yang terjadi dapat digantikan dengan momen pimer, sebagaimana tergambar pada gambar 4.9b. Dengan demikian struktur tersebut sudah menjadi struktur statis tertentu dengan dua beban terpusat dan beban momen di ujungnya. Untuk mempermudah penyelesainnya maka struktur tersebut dapat dipisah-pisah menjadi struktur sederhana sebagaimana tergambar pada gambar 4.9c, gambar 4.9d dan gambar 4.9e.




Gambar 4.9. Balok Terkekang dengan Dua Beban Terpusat

**1.** Reaksi dan Gaya Lintang

Reaksi perletakan merupakan jumlah dari reaksi perletakan akibat dua beban terpusat dari gambar 4.9c, akibat beban momen dari gambar 4.9d, dan akibat momen dari gambar 4.9e.

2. Momen

Momen merupakan gabungan dari hasil momen akibat beban merata dari gambar 4.9c, akibat beban momen dari gambar 4.9d, dan akibat momen dari gambar 4.9e.

Contoh 4.3. Jika diketahui nilai beban terpusat P sebesar 40 kN, jarak a sebesar 2 meter dan L sebesar 6 meter, maka besarnya momen primer berdsarkan Tabel 3.1, sebesar :

$$M_{AB} = -\frac{Pa(L-a)}{L} = -\frac{40.2(6-2)}{6^2} = -8{,}89$$

kNm

$$M_{BA} = \frac{Pa(L-a)}{L} = \frac{40.2(6-2)}{6^2} = 8{,}89$$

kNm

Reaksi akibat beban terpusat (gambar 4.9c) :

$$R_A = R_B = \frac{40.4 + 40.2}{6} = 40 \text{ kN}$$

Reaksi akibat momen di A (gambar 4.9d) :

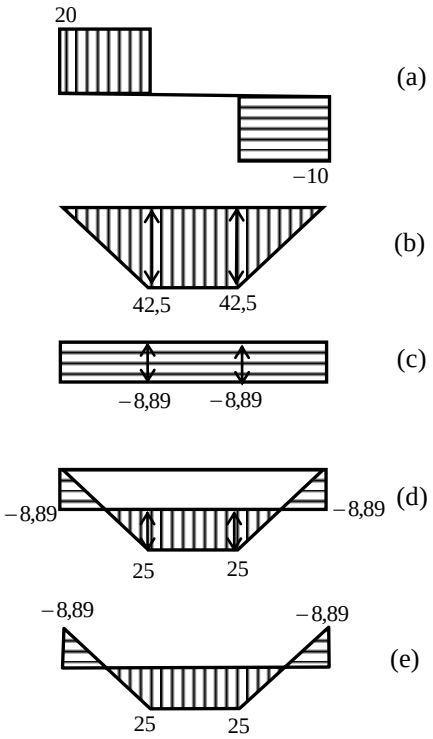
$$R_A = \frac{M_{AB}}{L} = \frac{8{,}89}{6} = 1{,}48 \text{ kN}$$

$$R_B = -\frac{M_{AB}}{L} = -\frac{8{,}89}{6} = -1{,}48 \text{ kN}$$

Reaksi akibat momen di B (gambar 4.9e)

$$R_A = -\frac{M_{BA}}{L} = -\frac{8{,}89}{6} = -1{,}48 \text{ kN}$$

$$R_B = \frac{M_{BA}}{L} = \frac{8{,}89}{6} = 1{,}48 \text{ kN}$$




Gambar 4.10. SFD dan BMD

Dengan demikian reaksi di A dan B, sebagai berikut :

$R_A = 40 + 1{,}48 - 1{,}48 = 40$ kN

$R_B = 40 - 1{,}48 + 1{,}48 = 40$ kN

Berdasarkan hasil reaksi tersebut gaya lintang dapat digambar sebagaimana gambar 4.10a, yang berupa SFD.

Momen akibat beban terpusat (gambar 4.9c) :

$M_A = M_B = 0$

$M_{max} = R_A \,.\, a = 21{,}25 \,.\, 2 = 42{,}5$ kNm

Hasil momen dapat digambarkan sebagaimana gambar 4.10b.

Momen akibat beban momen di A dan B (gambar 4.9c dan gambar 4.9d) dapat digambarkan seperti pada gambar 4.10c.

$M_A = -8{,}89$ kNm

$M_B = -8{,}89$ kNm

$M_{max} = M_B = -8{,}89$ KNm

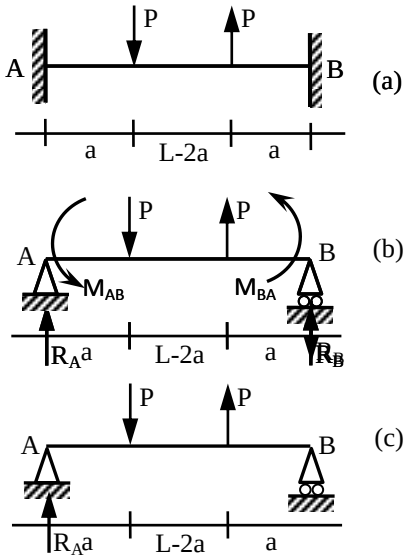
Gabungan akibat beban terpusat dan momen dapat digambarkan sebagaimana gambar 4.10d, dan jika disederhanakan maka hasilnya sebagaimana gambar 4.10e, besarnya momen yaitu :

$M_A = -8{,}89$ kNm

$M_B = -8{,}89$ kNm

$M_{max}$ = 42,5 – 8,89 = 25 kNm

Contoh 4.4. Jika beban terpusat P sebesar 40 kN saling berlawanan seperti pada gambar 4.11a, sedangkan jarak a dan L sama, yaitu sebesar 2 meter dan 6 meter, Hitung dan Gambarkan SFD dan BMD nya.




Penyelesaian :

Besarnya momen primer berdsarkan Tabel 3.1, sebesar :

$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{Pa}{L^2}(L-a)(L-2a)$$

$$= \frac{40.2(6-2)(6-2.2)}{6^2}$$

$$= 17{,}78 \text{ kNm}$$

Reaksi akibat beban terpusat (gambar 4.11c) :

$R_A = R_B = 0$ kN

Reaksi akibat momen di A (gambar 4.11d) :

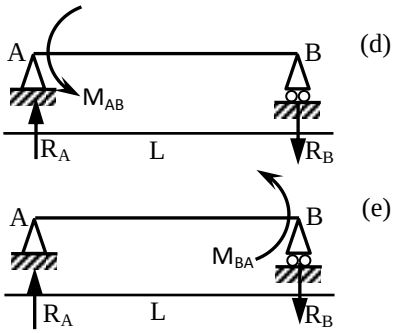
$$R_A = \frac{M_{AB}}{L} = \frac{17{,}78}{6} = 2{,}96 \text{ kN}$$

$$R_B = -\frac{M_{AB}}{L} = -\frac{17{,}78}{6} = -2{,}96 \text{ kN}$$

Reaksi akibat momen di B (gambar 4.11e)

$$R_A = \frac{M_{BA}}{L} = \frac{17{,}78}{6} = 2{,}96 \text{ kN}$$

$$R_B = -\frac{M_{BA}}{L} = -\frac{17{,}78}{6} = -2{,}96 \text{ kN}$$




Gambar 4.11. Balok Terkekang dengan Dua Beban Terpusat

Dengan demikian reaksi di A dan B, sebagai berikut :

$R_A = 0 + 2{,}96 + 2{,}96 = 5{,}92$ kN

$R_B = 0 – 2{,}96 – 2{,}96 = – 5{,}92$ kN

Berdasarkan hasil reaksi tersebut gaya lintang dapat digambar sebagaimana gambar 4.12a, yang berupa SFD.

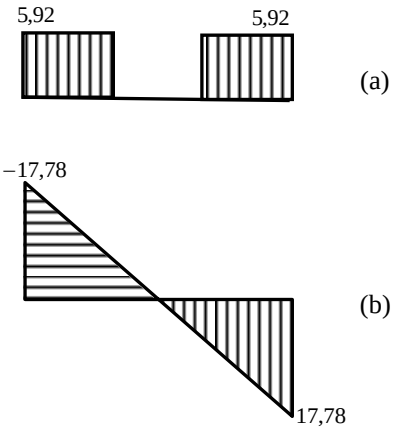
Momen merupakan gabungan dari hasil momen akibat beban momen dari gambar 4.11d, dan akibat momen dari gambar 4.11e. Sedangkan momen akibat beban terpusat

tidak ada (momen sama dengan nol), hal tersebut diakibatkan karena nilai reaksinya sama dengan nol.

Hasil akhir hanya ada momen akibat beban momen di A dan B (gambar 4.11c dan gambar 4.11d) dapat digambarkan seperti pada gambar 4.12b.

$M_A = -17{,}78$ kNm

$M_B = 17{,}78$ kNm




Gambar 4.12. SFD dan BMD

**F. Struktur Terkekang dengan Beban Segitiga**

Struktur terkekang dengan beban segitiga sebagaimana gambar 4.13a, merupakan stuktur statis tak tentu. Agar struktur tersebut dapat diselesaiakan maka dapat dirubah menjadi stuktur statis tertentu. Akibat perubahan tersebut, maka gaya kelebihan yang terjadi dapat digantikan dengan momen pimer, sebagaimana tergambar pada gambar 4.13b. Dengan demikian struktur tersebut sudah menjadi struktur statis tertentu dengan beban merata dan beban momen di ujungnya. Untuk mempermudah penyelesainnya maka struktur tersebut dapat dipisah-pisah menjadi struktur sederhana sebagaimana tergambar pada gambar 4.13c, gambar 4.13d dan gambar 4.13e.

Contoh 4.5. Jika diketahui struktur terjepit dengan beban segitiga seperti tergambar pada gambar 4.13a, dengan beban q sebesar 8 kN/m dan panjang bentang sebesar 10 meter. Hitung reaksi dan gambarkan gaya lintangnya.

Penyelesaian :

Reaksi perletakan merupakan jumlah dari reaksi perletakan akibat beban segitiga dari gambar 4.13.c, akibat beban momen dari gambar 4.13d, dan akibat momen dari gambar 4.13e. Besarnya Momen Primer diambil dari Tabel 3.1, yaitu sebesar :

$$M_{AB} = -\frac{qL^2}{20} = -\frac{8.10^2}{20} = -40 \text{ kNm}$$

$$M_{BA} = \frac{qL^2}{30} = \frac{8.10^2}{30} = 26{,}67 \text{ kNm}$$

Reaksi akibat beban segitiga (gambar 4.13c) :

$$\sum M_B = 0$$

$$R_A .10 - 8 . \frac{10}{2} . \frac{2}{3} .10 = 0$$

$$R_A = \frac{266,67}{10} = 26,67 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$R_A . 10 - 8 . \frac{10}{2} . \frac{1}{3} .10 = 0$$

$$R_B = \frac{133,33}{10} = 13,33 \text{ kN}$$

Reaksi akibat momen di A (gambar 4.13d) :

$$R_A = \frac{M_{AB}}{L} = \frac{40}{10} = 4 \text{ kN}$$

$$R_B = -\frac{M_{AB}}{L} = -\frac{40}{10} = -4 \text{ kN}$$

Reaksi akibat momen di B (gambar 4.13e)

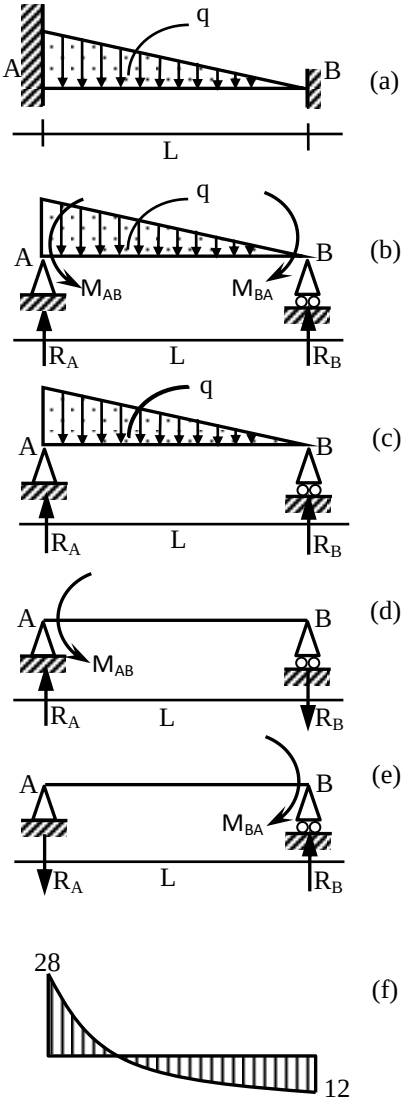
$$R_A = -\frac{M_{BA}}{L} = -\frac{26,67}{10} = -2,67 \text{ kN}$$

$$R_B = \frac{M_{BA}}{L} = \frac{26,67}{10} = 2,67 \text{ kN}$$

Dengan demikian reaksi di A dan B, sebagai berikut :

$R_A = 26,67 + 4 - 2,67 = 28$ kN

$R_B = 13,33 - 4 + 2,67 = 12$ kN




Gambar 4.13. Balok Terkekang dengan Beban Segitiga

Berdasarkan hasil reaksi tersebut gaya lintang dapat digambar sebagaimana gambar 4.13f. Jika diinginkan gambar bidang momen maka letak momen maksimum harus diketahui, yaitu terletak pada SFD = 0, yang berjarak x dari A. Besarnya nilai dapat dihitung sebagai berikut :

$$SF_X = 0$$

$$R_A - \frac{q.x}{2} - \frac{q.(L-x)x}{L} = 0$$

$$28 - \frac{8.x}{2} - \frac{8.(10-x)x}{10} = 0$$

$$x = 2,05 \text{ m}$$

## G. Struktur Sendi - Jepit dengan Beban Merata Penuh

Struktur sendi-jepit dengan beban merata penuh sebagaimana gambar 4.1a, merupakan stuktur statis tak tentu, sebab jumlah komponen reaksi perletakannya lebih besar dari pada jumlah persamaan keseimbangan statisnya. Agar struktur tersebut dapat diselesaiakan maka dapat dirubah menjadi stuktur statis tertentu. Akibat perubahan tersebut, maka gaya kelebihan yang terjadi dapat digantikan dengan momen pimer, sebagaimana tergambar pada gambar 4.1b. Dengan demikian struktur tersebut sudah menjadi struktur statis tertentu dengan beban merata dan beban momen di ujungnya. Untuk mempermudah penyelesainnya maka struktur tersebut dapat dipisah-pisah menjadi struktur sederhana sebagaimana tergambar pada gambar 4.1c dan gambar 4.1d.

1. Reaksi dan Gaya Lintang

Reaksi perletakan merupakan jumlah dari reaksi perletakan akibat beban merata dari gambar 4.1.c, dan akibat beban momen dari gambar 4.1d. Besarnya Momen Primer diambil dari Tabel 3.1, yaitu sebesar :

$$M_{BA} = \frac{qL^2}{8}$$

Reaksi akibat beban merata (gambar 4.1c) :

$$R_A = R_B = \frac{qL}{2}$$

Reaksi akibat momen di B (gambar 4.1d)

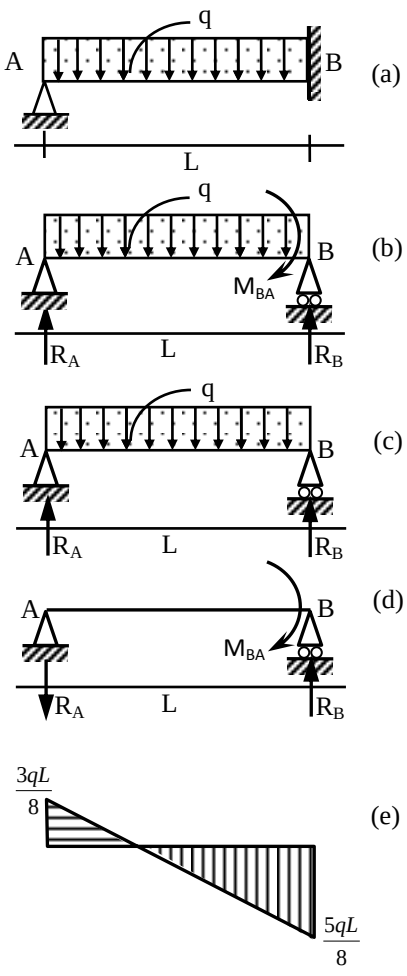
$$R_A = -\frac{M_{BA}}{L} = -\frac{q.L}{8}$$

$$R_B = \frac{M_{BA}}{L} = \frac{q.L}{8}$$

Dengan demikian reaksi di A dan B, sebagai berikut :

$$R_A = \frac{qL}{2} - \frac{q.L}{8} = \frac{3qL}{8}$$

$$R_B = \frac{qL}{2} + \frac{q.L}{8} = \frac{5qL}{8}$$




Gambar 4,14. Balok Jepit-Sendi dengan Beban Merata Penuh

Berdasarkan hasil reaksi tersebut gaya lintang dapat digambar sebagaimana gambar 4.14e.

2. Momen

Momen merupakan gabungan dari hasil momen akibat beban merata dari gambar 4.1c dan akibat beban momen dari gambar 4.1d. Momen maksimum akan terjadi pada SFD sama dengan nol, berdasarkan gambar 4.14e terletak pada x. Jarak x sebagai berikut :

SFD = 0

$$\frac{3qL}{8} - qx = 0$$

$$x = \frac{3}{8}L$$

Momen akibat beban merata (gambar 4.1c) :

$$M_A = M_B = 0$$

$$M_T = R_A \cdot \frac{L}{2} - q.\frac{L}{2}.\frac{L}{4}$$

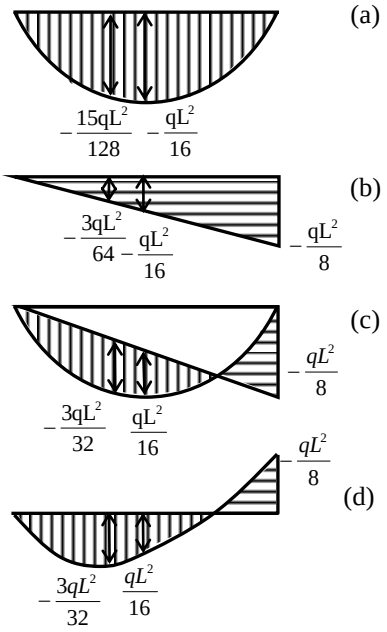
$$= \frac{qL}{2}.\frac{L}{2} - \frac{qL^2}{8}$$

$$= \frac{qL^2}{8}$$

$$M_x = R_A \cdot \frac{3}{8}L - q.\frac{3L}{8}.\frac{3L}{8}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{qL}{2}.\frac{3}{8}L - \frac{9}{128}qL^2$$

$$= \frac{15}{128}qL^2$$



Gambar 4,15. SFD dan BMD

Hasil momen dapat digambarkan sebagaimana gambar 4.15a.

Berdasarkan gambar 4.14d. momen akibat beban momen di A, BMD nya dapat digambarkan seperti gambar 4.15b, dimana besarnya :

$$M_A = 0$$

$$M_B = -\frac{q.L^2}{8}$$

$$M_T = \frac{\left(-\frac{q.L^2}{8}\right)\left(\frac{L}{2}\right)}{L} = -\frac{q.L^2}{16}$$

$$M_x = \frac{\left(-\frac{q.L^2}{8}\right)\left(\frac{3}{8}L\right)}{L} = -\frac{3}{64}qL^2$$

Gabungan akibat beban merata dan momen dapat digambarkan sebagaimana gambar 4.15c, dan jika disederhanakan maka hasilnya sebagaimana gambar 4.15d, besarnya momen yaitu :

$M_A = 0$

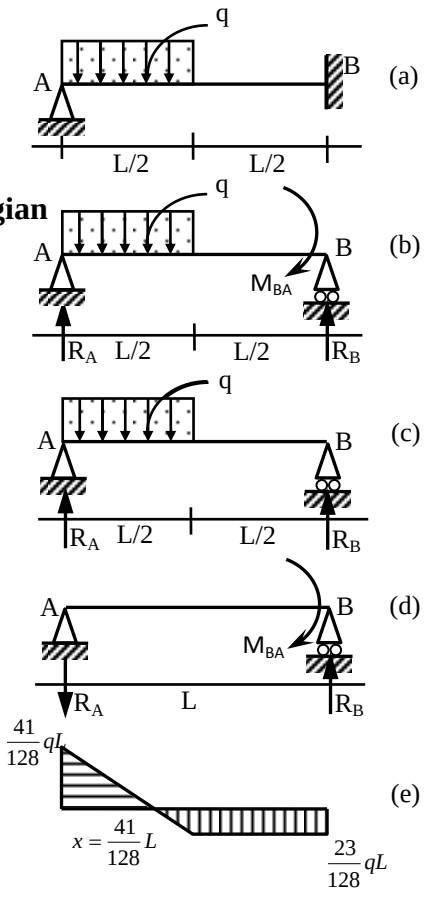
$$M_B = -\frac{q.L^2}{8}$$

$$M_T = \frac{qL^2}{8} - \frac{q.L^2}{16} = \frac{q.L^2}{16}$$

$$M_x = \frac{15}{128}qL^2 - \frac{3}{64}qL^2 = \frac{12}{128}qL^2 = \frac{3}{32}qL^2$$

**H. Struktur Jepit - Sendi dengan Beban Merata Sebagian**

Struktur jepit-sendi dengan beban merata sebagian sebagaimana gambar 4.16a, merupakan stuktur statis tak tentu. Agar struktur tersebut dapat diselesaiakan maka dapat dirubah menjadi stuktur statis tertentu. Akibat perubahan tersebut, maka gaya kelebihan yang terjadi dapat digantikan dengan momen pimer, sebagaimana tergambar pada gambar 4.16b. Dengan demikian struktur tersebut sudah menjadi struktur statis tertentu dengan beban merata dan beban momen di ujungnya. Untuk mempermudah penyelesainnya maka struktur tersebut dapat dipisah-pisah menjadi struktur sederhana sebagaimana tergambar pada gambar 4.16c dan gambar 4.16d.




Gambar 4.16. Balok Jepit-Sendi dengan Beban Merata Sebagian

1. Reaksi dan Gaya Lintang

Reaksi perletakan merupakan jumlah dari reaksi perletakan akibat beban merata dari gambar 4.16c dan akibat beban momen dari gambar 4.16d. Besarnya Momen Primer diambil dari Tabel 3.1, yaitu sebesar :

$$M_{BA} = \frac{7}{128} qL^2$$

Reaksi akibat beban merata sebagian (gambar 4.16c) :

$$\sum M_B = 0$$

$$R_A \,.\, L - q \,.\, \frac{L}{2} \,.\, \frac{3}{2} L = 0$$

$$R_A = \frac{3}{8} qL$$

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B = \frac{1}{8} qL$$

Reaksi akibat momen di B (gambar 4.16d)

$$R_A = -\frac{M_{BA}}{L} = -\frac{7}{128} qL$$

$$R_B = \frac{M_{BA}}{L} = \frac{7}{128} qL$$

Dengan demikian reaksi di A dan B, sebagai berikut :

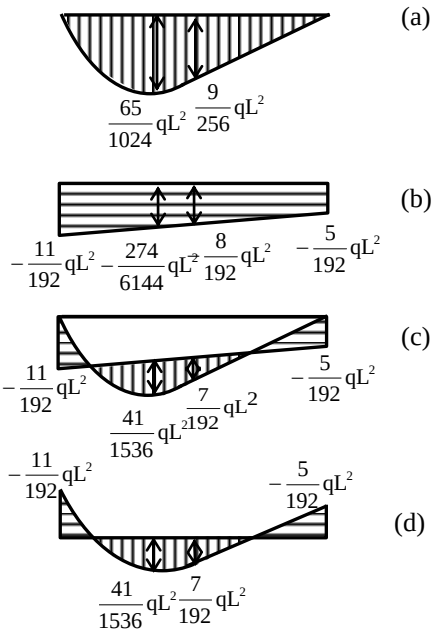
$$R_A = \frac{3}{8} qL - \frac{7}{128} qL = \frac{41}{128} qL$$

$$R_B = \frac{1}{8} qL + \frac{7}{128} qL = \frac{23}{128} qL$$

Berdasarkan hasil reaksi tersebut gaya lintang dapat digambar sebagaimana gambar 4.16e.

2. Momen CHECK MX

Momen merupakan gabungan dari hasil momen akibat beban merata dari gambar 4.16c, dan




Gambar 4.17. BMD

akibat beban momen dari gambar 4.16d. Momen maksimum akan terjadi pada SFD sama dengan nol, yaitu terletak pada x dari A. Berdasarkan gambar 4.15e jarak x sebagai berikut :

$$SF_X = 0$$

$$\frac{41}{128}qL - qx = 0$$

$$x = \frac{41}{128}L$$

Momen akibat beban merata (gambar 4.16c) :

$$M_A = M_B = 0$$

$$M_T = R_A \cdot \frac{L}{2} - q.\frac{L}{2}.\frac{L}{4}$$

$$= \frac{41}{128}qL \cdot \frac{L}{2} - \frac{qL^2}{8}$$

$$= \frac{9}{256}qL^2$$

$$M_x = R_A.\ \frac{41}{128}L - q.\ \frac{41}{128}L \cdot \frac{L}{4}$$

$$= \frac{41}{128}qL \cdot \frac{41}{128}L - \frac{41}{504}qL^2$$

$$= \frac{369}{16384}qL^2$$

Hasil momen dapat digambarkan sebagaimana gambar 4.17a.

Momen akibat beban momen di B (gambar 4.16d) dapat digambarkan seperti pada gambar 4.17b.

$$M_A = 0$$

$$M_B = -\frac{7}{128}qL^2$$

$$M_T = \frac{\left(-\frac{7}{128}qL^2\right)\left(\frac{L}{2}\right)}{L} = -\frac{7}{256}qL^2$$

$$M_X = \frac{\left(-\frac{7}{128}qL^2\right)\left(\frac{41}{128}L\right)}{L} = -\frac{287}{16384}qL^2$$

Gabungan akibat beban merata dan momen dapat digambarkan sebagaimana gambar 4.17c, dan jika disederhanakan maka hasilnya sebagaimana gambar 4.17d, besarnya momen yaitu :

$$M_A = 0$$

$$M_B = -\frac{7}{128} qL^2$$

$$M_T = \frac{9}{256} qL^2 - \frac{7}{256} qL^2 = \frac{2}{256} qL^2 = \frac{1}{128} qL^2$$

$$M_{max} = \frac{369}{16384} qL^2 - \frac{287}{16384} qL^2$$

$$= \frac{82}{16384} qL^2 = \frac{41}{8142} qL^2$$

Contoh 4.6. Jika diketahui struktur jepit-sendi dengan beban merata sebagian seperti tergambar pada gambar 4.18a, dengan beban q sebesar 8 kN/m dan panjang bentang sebesar 10 meter. Hitung reaksi dan gambarkan gaya lintang serta momennya.

Penyelesaian :

1. Reaksi dan Gaya Lintang

Reaksi perletakan merupakan jumlah dari reaksi perletakan akibat beban merata dari gambar 4.18c dan akibat beban momen dari gambar 4.18d. Besarnya Momen Primer diambil dari Tabel 3.1, yaitu sebesar :

$$M_{BA} = \frac{7}{128} qL^2 \; \frac{7}{128}.8.10^2 = 43{,}75 \text{ kNm}$$

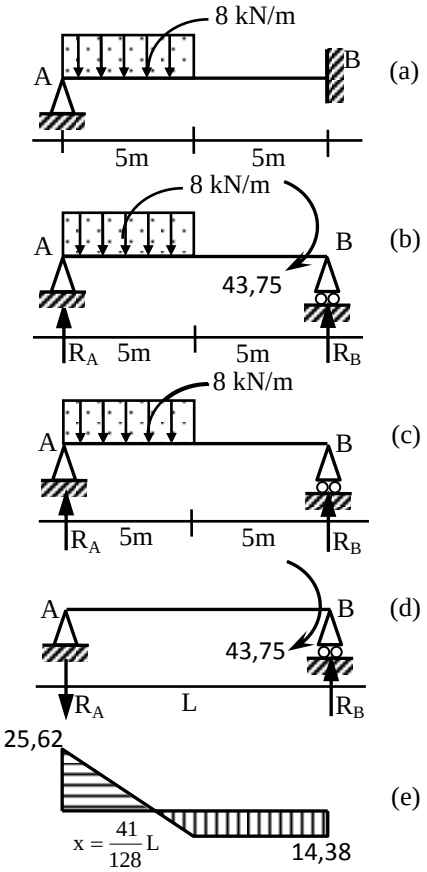
Reaksi akibat beban merata sebagian (gambar 4.16c) :

$$\sum M_B = 0$$

$$R_A \,.\, 10 - 8.5.\left(5 + \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$R_A = \frac{300}{10} = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$




Gambar 4.18. Balok Jepit-Sendi dengan Beban Merata Sebagian

$$R_B = \frac{100}{10} = 10 \text{ kN}$$

Reaksi akibat momen di B (gambar 4.16d)

$$R_A = -\frac{M_{BA}}{L} = -\frac{43{,}75}{10} = -4{,}38 \text{ kN}$$

$$R_B = \frac{M_{BA}}{L} = \frac{43{,}75}{10} = 4{,}38 \text{ kN}$$

Dengan demikian reaksi di A dan B, sebagai berikut :

$R_A = 30 - 4{,}38 = 25{,}62$ kN

$R_B = 10 + 4{,}38 = 14{,}38$ kN

Berdasarkan hasil reaksi tersebut gaya lintang dapat digambar sebagaimana gambar 4.16e.

2. Momen

Momen merupakan gabungan dari hasil momen akibat beban merata dari gambar 4.16c, dan akibat beban momen dari gambar 4.16d. Momen maksimum akan terjadi pada SFD sama dengan nol, yaitu terletak pada x dari A. Berdasarkan gambar 4.15e jarak x sebagai berikut :

$SF_X = 0$

$25{,}62 - 8\,x = 0$

$x = 3{,}2$ m

Momen akibat beban merata (gambar 4.16c) :

$M_A = M_B = 0$

$M_T = 25{,}62 \,.\, 5 - 8 \,.\, 5 \,.\, 2{,}5$

$= 28{,}10$ kNm

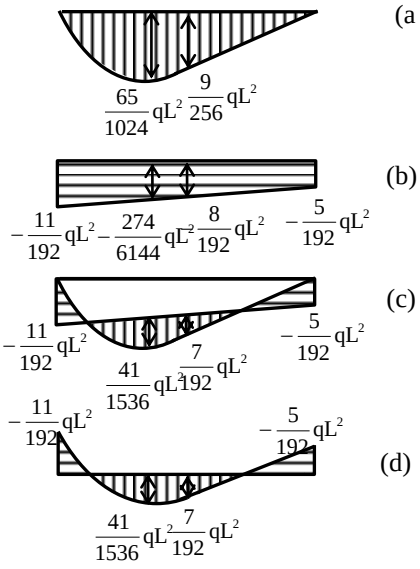
$M_x = 25{,}62 \,.\, 3{,}2 - 8.\, 3{,}2 \,.\, 3{,}2/2$

$= 41{,}02$ kNm

Hasil momen dapat digambarkan sebagaimana gambar 4.19a.

Momen akibat beban momen di B (gambar 4.18d) dapat digambarkan seperti pada gambar 4.19b.

$M_A = 0$




Gambar 4.19. BMD

$M_B = -43{,}75$

$M_T = -\frac{43{,}75.5}{10} = -21{,}88$ kNm

$M_X = -\frac{43{,}75.3{,}2}{10} = -14$ kNm

Gabungan akibat beban merata dan momen dapat digambarkan sebagaimana gambar 4.19c, dan jika disederhanakan maka hasilnya sebagaimana gambar 4.19d, besarnya momen yaitu : $M_A = 0$

$M_B = -43{,}75$

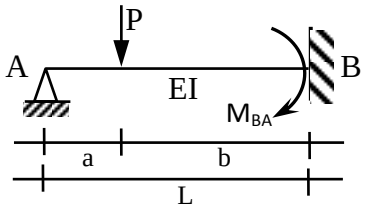
$M_T = 28{,}1 - 21{,}88 = 6{,}22$ kNm

$M_{max} = 41{,}02 - 14 = 27{,}02$ kNm

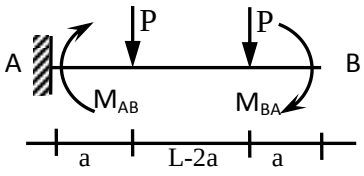
## I. Soal Latihan

Hitung dan Gambarkan Reakasi, Gaya Lintang **dan Momen Struktur yang ter**gambar dibawah :

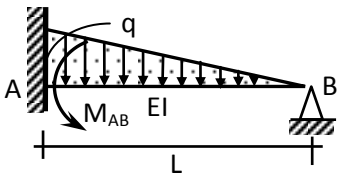
1. Struktur Jepit - Sendi dengan Satu Beban Terpusat



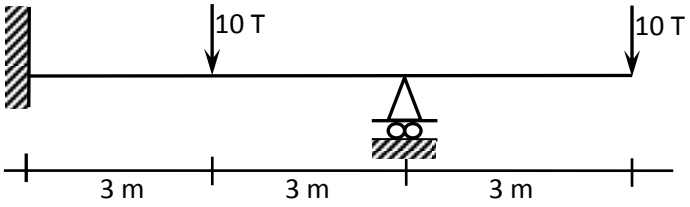

2. Struktur Jepit - Sendi dengan Dua Beban Terpusat



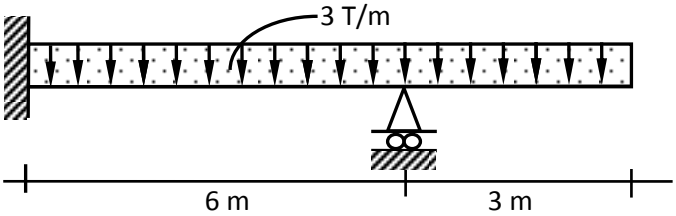

3. Struktur Jepit - Sendi dengan Dua Beban Terpusat

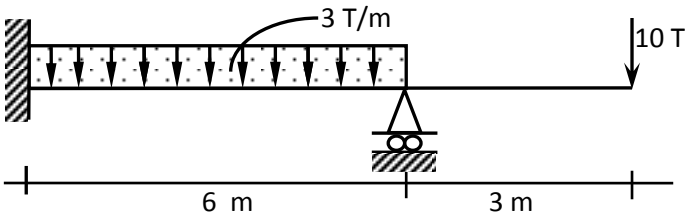


4. Struktur Struktur Balok – Cantilever dengan Beban Merata dan Beban Terpusat




5. Struktur Balok – Cantilever dengan Beban Merata Penuh




6. Struktur Struktur Balok – Cantilever dengan Beban Merata dan Beban Terpusat