

KALKULUS

Aplikasi pada Vektor dan Elektromagnetik



DR. RAMADONI SYAHPUTRA

**Program Studi Teknik Elektro
Fakultas Teknik
Universitas Muhammadiyah Yogyakarta
2021**



PRAKATA

Bismillaahirrahmaanirrahiim

Syukur alhamdulillah penulis panjatkan ke hadirat ALLAH SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan diktat berjudul “KALKULUS: Aplikasi pada Vektor dan Elektromagnetik”. Dengan penulisan buku ajar ini diharapkan dapat membantu para pembaca khususnya mahasiswa Program Studi Teknik Elektro untuk lebih mengenal dan memahami konsep Kalkulus dan aplikasinya dalam berbagai bidang. Diktat ini dapat digunakan sebagai acuan utama oleh mahasiswa dan dosen khususnya Program Studi Teknik Elektro dalam proses pembelajaran matakuliah terkait Kalkulus, Vektor, dan Elektromagnetik. Diktat ini dapat juga digunakan sebagai acuan tambahan untuk mata-mata kuliah yang berhubungan dengan aplikasi elektromagnetik seperti Dasar Telekomunikasi, Mesin-mesin Listrik, Teknologi Gelombang Mikro, Antena dan Perambatan Gelombang, dan lain-lain.

Penyelesaian buku ajar ini tidak lepas dari banyak pihak yang telah membantu. Oleh karena itu bersama ini penulis menyampaikan terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Gunawan Budiyanto, MP., sebagai Rektor Universitas Muhammadiyah Yogyakarta,
2. Ir. Aris Widyo Nugroho, ST., MT., Ph.D., sebagai Dekan Fakultas Teknik UMY,
3. Seluruh dosen, karyawan, dan mahasiswa Program Studi Teknik Elektro Fakultas Teknik UMY, yang telah banyak membantu dan memberikan masukan kepada penulis dan dalam mengemban tugas-tugas yang diamanahkan kepada penulis,
4. Isteriku tercinta Dr. Indah Soesanti, S.T., M.T., yang telah banyak membantu dan memberikan masukan yang sangat berguna dalam penyelesaian buku ajar ini,
5. Ibunda (almh) dan ayahanda (alm), dan



6. Semua pihak yang telah membantu yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Semoga semuanya tercatat sebagai amal shalih yang mendapatkan balasan di dunia dan akhirat kelak, amin ya robbal ‘alamin.

Penulis menyadari bahwa diktat ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu segala kritik dan saran yang bersifat membangun akan penulis terima dengan lapang dada. Akhirnya, semoga buku ajar ini dapat bermanfaat dalam proses pembelajaran khususnya pada Program Studi Teknik Elektro.

Yogyakarta, September 2021

Penulis,

Dr. Ramadoni Syahputra

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PRAKATA	iii
DAFTAR ISI	v
DAFTAR TABEL	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
1. ANALISIS VEKTOR	1
1.1. Pendahuluan	1
1.2. Aljabar Vektor	1
1.2.1. Perkalian titik	2
1.2.2. Perkalian silang	3
1.3. Sistem-sistem Koordinat	5
1.3.1. Sistem koordinat kartesian	5
1.3.2. Sistem koordinat tabung	9
1.3.3. Sistem koordinat bola	13
2. HUKUM COULOMB DAN INTENSITAS MEDAN LISTRIK	19
2.1. Hukum Eksperimental Coulomb	19
2.2. Intensitas Medan Listrik	21
2.3. Medan Listrik dari n Muatan Titik	22
2.4. Medan Distribusi Muatan	23
2.4.1. Medan muatan volume	23
2.4.2. Medan muatan garis	25
2.4.3. Medan muatan bidang	27
3. KERAPATAN FLUKS LISTRIK, HUKUM GAUSS, DAN DIVERGENSI	31
3.1. Kerapatan Fluks Listrik	31



3.2. Hukum Gauss	33
3.3. Pemakaian Hukum Gauss pada Distribusi Muatan Simetris.....	36
3.4. Pemakaian Hukum Gauss pada Unsur Volume Diferensial	37
3.5. Divergensi	39
3.6. Persamaan Pertama Maxwell (Elektrostatika)	41
3.7. Operator Vektor ∇ dan Teorema Divergensi	41
4. ENERGI DAN POTENSIAL LISTRIK	45
4.1. Energi untuk Menggerakkan Muatan Titik dalam Medan Listrik	45
4.2. Beda Potensial dan Potensial	47
4.3. Medan Potensial Sebuah Muatan Titik	49
4.4. Medan Potensial Sistem Muatan	50
4.5. Gradien Potensial	52
4.6. Energi dalam Medan Elektrostatik	53
5. KAPASITANSI DAN BAHAN DIELEKTRIK	57
5.1. Polarisasi dan Permittivitas Relatif	57
5.2. Kapasitansi	59
5.3. Medan Listrik pada Kondisi Tegangan Tetap	61
5.4. Medan Listrik Pada Kondisi Muatan Tetap	61
5.5. Energi Tersimpan dalam Kapasitor	62
5.6. Bumi Sebagai Kapasitor Alami	64
6. PERSAMAAN POISSON DAN LAPLACE	67
6.1. Pendahuluan	67
6.2. Persamaan Poisson dan Laplace	67
6.3. Teorema Keunikan	69
7. MEDAN MAGNETIK TUNAK	73
7.1. Pendahuluan	73
7.2. Hukum Biot-Savart	73



7.3. Hukum Integral Ampere	77
7.4. Kurl	78
7.5. Teorema Stokes	83
7.6. Fluks Magnetik dan Kerapatan Fluks Magnetik	84
7.7. Potensial Magnetik Skalar dan Vektor	86
8. GAYA MAGNETIK, BAHAN MAGNETIK, DAN INDUKTANSI	89
8.1. Pendahuluan	89
8.2. Gaya pada Muatan Bergerak	89
8.3. Gaya pada Unsur Arus Diferensial	90
8.4. Gaya antar Unsur Arus Diferensial	93
8.5. Gaya dan Torka dalam Medan Magnetik	94
8.6. Magnetisasi dan Permeabilitas	95
8.7. Rangkaian Magnetik	96
8.8. Energi dalam Medan Magnetik	98
8.9. Induktansi dan Induktansi Saling	99
8.10 Aplikasi Medan Magnet: <i>Magnetic Levitation (Maglev)</i>	101
9. GELOMBANG ELEKTROMAGNETIK	105
9.1. Gerak Gelombang dalam Ruang Hampa	105
9.2. Gerak Gelombang dalam Dielektrik Sempurna	111
9.3. Gelombang Datar dalam Dielektrik Merugi	114
9.4. Vektor Poynting dan Peninjauan Daya	116
9.5. Penjalaran dalam Konduktor	118
10. APLIKASI ELEKTROMAGNETIK	123
10.1. Magnetic Levitation (MAGLEV)	123
10.2. Microwave Oven	135
DAFTAR PUSTAKA	139



« *halaman ini sengaja dikosongkan* »

DAFTAR TABEL

Tabel 1.1. Perkalian Titik antara Vektor Satuan dalam Sistem Koordinat Kartesian dan Sistem Koordinat Tabung	13
Tabel 1.2. Perkalian Titik antara Vektor Satuan dalam Sistem Koordinat Kartesian dan Sistem Koordinat Bola	15



« *halaman ini sengaja dikosongkan* »

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1. Penjumlahan vektor secara grafik	1
Gambar 1.2. Arah $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ sesuai dengan arah majunya sekrup putar kanan	4
Gambar 1.3. Sistem koordinat kartesian, (a). Sumbu x, y, dan z dari koordinat kartesian, (b). Letak titik P (1, 2, 3) dan Q (2, -2, 1), dan (c). Elemen volume diferensial dalam koordinat kartesian	6
Gambar 1.4. Komponen vektor dan vektor satuan. (a). Vektor \mathbf{x} , \mathbf{y} , dan \mathbf{z} dari vektor \mathbf{r} , (b). Vektor satuan dari sistem koordinat kartesian, dan (c). Vektor \mathbf{R}_{PQ} sama dengan beda vektor $\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P$	8
Gambar 1.5. Sistem koordinat tabung. (a). Ketiga bidang saling tegak lurus, (b). Ketiga vektor satuan dalam sistem koordinat kartesian, dan (c). Volume diferensial dalam koordinat tabung	10
Gambar 1.6. Hubungan antara peubah koordinat kartesian dan peubah koordinat tabung	11
Gambar 1.7. Sistem koordinat bola. (a). Ketiga koordinat bola, (b). Ketiga bidang yang saling tegak lurus pada sistem koordinat bola, (c). Ketiga vektor satuan koordinat bola, dan (d) Elemen volume diferensial pada sistem koordinat bola	14
Gambar 2.1. Arah vektor gaya \mathbf{F}_2 pada Q_2 sama dengan arah vektor \mathbf{R}_{12}	20
Gambar 2.2. Penjumlahan vektor dari medan listrik yang ditimbulkan oleh Q_1 dan Q_2	23
Gambar 2.3. Muatan total di dalam tabung lingkaran	24
Gambar 2.4. Muatan garis yang memanjang sepanjang sumbu z	26
Gambar 2.5. Penentuan medan di titik P oleh satu lembaran muatan menggunakan persamaan $d\mathbf{E} = \rho_s dy \mathbf{a}_r / 2\pi\epsilon_0 R$	28
Gambar 3.1. Fluks listrik di antara dua bola sepusat konsentris yang bermuatan	31
Gambar 3.2. Awan muatan titik yang dilingkungi oleh permukaan tertutup	33



Gambar 3.3. Pemakaian hukum Gauss untuk medan muatan titik pada permukaan bola	34
Gambar 3.4. Permukaan Gauss berukuran diferensial dengan titik P dipakai untuk menyelidiki laju perubahan ruang dari \mathbf{D} di sekitar P	37
Gambar 3.5. Ilustrasi tentang teorema divergensi	42
Gambar 4.1. Lintasan umum antara titik B dan A dalam medan muatan titik Q di titik asal	49
Gambar 4.2. Medan potensial muatan garis serbasama yang berbentuk Cincin	51
Gambar 4.3. Titik A dan B yang berdekatan di dalam daerah V	52
Gambar 5.1. Proses polarisasi bahan dielektrik dalam medan listrik	57
Gambar 5.2. Dua penghantar yang dipisahkan oleh bahan dielektrik	59
Gambar 5.3. Bumi dengan permukaan konduksi elektrosfer dan ionosfer	64
Gambar 7.1. Ilustrasi tentang hukum Biot-Savart	74
Gambar 7.2. Filamen lurus yang panjangnya tak berhingga dialiri arus searah I	74
Gambar 7.3. Garis-garis intensitas medan magnetik di sekitar seutas filamen yang panjangnya tak berhingga dialiri arus I yang arahnya masuk ke bidang kertas	76
Gambar 7.4. Intensitas medan magnetik yang ditimbulkan oleh filamen arus yang panjangnya berhingga	77
Gambar 7.5. Konduktor yang dialiri arus listrik I, dengan lintasan a dan b memenuhi hukum integral Ampere, sedang lintasan c tidak memenuhi	78
Gambar 7.6. Pertambahan lintasan tertutup dalam koordinat kartesian untuk pemakaian hukum integral Ampere guna menentukan laju perubahan \mathbf{H}	79
Gambar 7.7. Ilustrasi dari suatu daerah ΔS dan permukaan S	84
Gambar 8.1. Dua filamen sejajar berjarak d yang dialiri arus yang sama besar tetapi berlawanan arah mengalami gaya tolak-menolak	94

Gambar 8.2. Bagian kumparan yang menunjukkan pertautan fluks parsial	100
Gambar 8.3. Levitasi magnetik oleh magnet-magnet permanen: (a) kalang belitan-tunggal (<i>single-turn loop</i>), (b) kalang yang (b) ditunjukkan pada bagian persilangan, dan (c) kalang di atas lembaran konduktor	101
Gambar 9.1(a) Gelombang medan listrik, (b) Gelombang medan magnetik	111
Gambar 9.2. Kerugian daya dalam konduktor	121
Gambar 10.2. Sistem Maglev	125
Gambar 10.3 Susunan Rel Maglev Train	126
Gambar 10.4 Rel super konduktor	128
Gambar 10.5 Konstruksi mesin maglev	128
Gambar 10.6 Maglev Transrapid di Shanghai	129
Gambar 10.7 Electromagnetic Suspension (EMS)	131
Gambar 10.8 Electrodynamics Suspension (EDS)	131
Gambar 10.9 Inductrack System	132
Gambar 10.10 Magnet Levitation	132
Gambar 10.11 Microwave oven	135
Gambar 10.12 Magnetron	136
Gambar 10.13 Skema Magnetron	137
Gambar 10.14 Waveguide dalam Microwave Oven	137
Gambar 10.15. Microwave Stirrer	138



« halaman ini sengaja dikosongkan »

BAB I

ANALISIS VEKTOR

1.1 PENDAHULUAN

Skalar ialah besaran yang hanya mempunyai besar (magnitudo) [1]-[2]. Skalar dapat dinyatakan dengan sebuah bilangan nyata. Notasi x , y , dan z yang dipakai dalam aljabar dasar adalah skalar, dan besaran yang dinyatakan juga merupakan skalar. Besaran skalar lainnya ialah massa, kerapatan, tekanan, dan volume. Vektor merupakan besaran yang mempunyai besar (magnitudo) dan arah dalam ruang. Gaya, kecepatan, percepatan, intensitas medan elektrik, dan intensitas medan magnetik merupakan contoh-contoh dari vektor. Masing-masing besaran tersebut dikarakteristikan dengan besar dan arahnya.

Dalam buku ini vektor dituliskan dengan memakai simbol huruf yang ditebalkan, misalnya \mathbf{A} dan vektor satuan dituliskan dengan huruf kecil yang ditebalkan, misalnya \mathbf{a}_x . Jika ditulis tangan atau diketik manual, untuk menyatakan vektor dan vektor satuan biasanya dengan menambahkan garis atau anak panah di atas besarannya, misalnya \bar{A} atau $\overset{\uparrow}{A}$ dan \bar{a}_x atau $\overset{\uparrow}{a}_x$.

1.2 ALJABAR VEKTOR

Penjumlahan vektor mengikuti hukum jajaran genjang dan dapat diselesaikan secara grafik. Gambar 1.1 menunjukkan penjumlahan dua buah vektor \mathbf{A} dan \mathbf{B} . Dapat dilihat bahwa penjumlahan vektor mengikuti hukum komutatif, yaitu $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$. Penjumlahan vektor juga memenuhi hukum asosiatif, yaitu $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.



Gambar 1.1. Penjumlahan vektor secara grafik

Pengurangan vektor mengikuti aturan penjumlahan vektor, karena pengurangan vektor $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ yaitu tanda dan arah vektor kedua dibalik, kemudian vektor ini dijumlahkan dengan vektor yang pertama.

Vektor dapat dikalikan dengan sebuah skalar, besar vektor tersebut berubah tetapi arahnya tetap jika skalar tersebut positif. Vektor akan berbalik arahnya jika dikalikan dengan skalar negatif. Perkalian vektor dengan skalar mengikuti hukum asosiatif dan distributif dari aljabar sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (r + s) (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + s(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \\ &= r\mathbf{A} + r\mathbf{B} + s\mathbf{A} + s\mathbf{B} \end{aligned}$$

Pembagian sebuah vektor dengan sebuah skalar berarti perkalian vektor tersebut dengan kebalikan dari skalar tersebut.

Dua vektor disebut sama jika selisihnya adalah nol, atau:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \text{ jika } \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

1.2.1 Perkalian Titik

Tinjaulah dua vektor \mathbf{A} dan \mathbf{B} , hasil perkalian skalarnya atau perkalian titiknya didefinisikan sebagai perkalian dari besar \mathbf{A} dan besar \mathbf{B} , dikalikan dengan kosinus sudut antara kedua vektor tersebut (ambil sudut terkecil antara \mathbf{A} dan \mathbf{B}).

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta_{AB} \quad \dots\dots\dots(1.1)$$

Perkalian titik atau perkalian skalar juga merupakan skalar, seperti dinyatakan oleh salah satu namanya, dan mengikuti hukum komutatif,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad \dots\dots\dots(1.2)$$

karena tanda sudutnya tidak mempengaruhi suku kosinus. Pernyataan $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ dibaca " \mathbf{A} titik \mathbf{B} " atau " \mathbf{A} dot \mathbf{B} ".

Tinjau dua vektor yang komponennya dalam koordinat kartesian diketahui, misalnya $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ dan $\mathbf{B} = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z$. Perkalian titik memenuhi hukum distributif, jadi $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ menghasilkan jumlah dari sembilan skalar, masing-masing mengandung perkalian titik dua vektor satuan. Karena sudut antara dua vektor satuan yang berbeda dalam sistem koordinat kartesian adalah 90° , maka



$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y = 0$$

Tiga suku lainnya mengandung perkalian titik vektor satuan dengan dirinya sendiri, sehingga hasilnya ialah satuan. Jadi perkalian titik dua vektor dapat dituliskan:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad \dots\dots\dots(1.3)$$

Perkalian titik antara vektor dengan dirinya sendiri menghasilkan kuadrat dari besar vektor tersebut, atau

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^2 = |\mathbf{A}|^2 \quad \dots\dots\dots(1.4)$$

dan tiap vektor satuan dikalikan dengan dirinya sendiri menghasilkan satuan, $\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_A = 1$.

Contoh 1.2. Diberikan vektor

$$\mathbf{A} = 2 \mathbf{a}_x - 3 \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \text{ dan vektor } \mathbf{B} = -4 \mathbf{a}_x - 2 \mathbf{a}_y + 5 \mathbf{a}_z.$$

Hitunglah $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

Jawab:

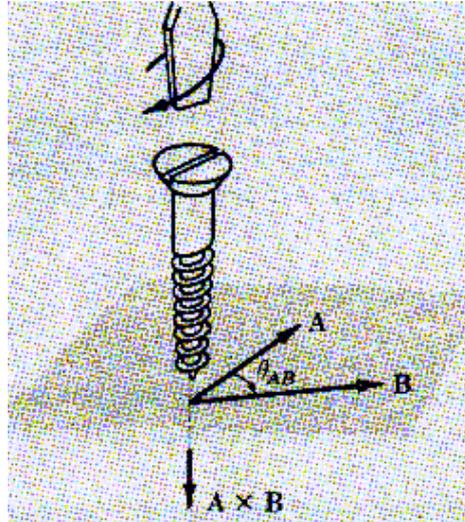
$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= [(2)(-4) + (-3)(-2) + (1)(5)] = -8 + 6 + 5 \\ &= 3 \end{aligned}$$

1.2.2 Perkalian Silang

Perkalian silang vektor \mathbf{A} dan \mathbf{B} dituliskan dengan tanda silang antara kedua vektor tersebut, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, dan biasanya dibaca " \mathbf{A} silang \mathbf{B} " atau " \mathbf{A} cross \mathbf{B} ". Perkalian silang $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ merupakan sebuah vektor. Besar $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ sama dengan besar \mathbf{A} dikalikan dengan besar \mathbf{B} dan kemudian dikalikan dengan sinus sudut terkecil antara \mathbf{A} dan \mathbf{B} . Arah $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ tegak lurus pada bidang datar tempat \mathbf{A} dan \mathbf{B} terletak, dan arahnya sesuai dengan arah maju sekrup putar kanan yang diputar dari \mathbf{A} ke \mathbf{B} , seperti terlihat pada gambar 1.2. Rumusan perkalian silang adalah:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{a}_N |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta_{AB} \quad \dots\dots\dots(1.5)$$

dengan pernyataan tambahan yang diperlukan untuk menyatakan arah vektor satuan \mathbf{a}_N . Subskrip N menyatakan *normal*.



Gambar 1.2. Arah $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ sesuai dengan arah majunya sekrup putar kanan.

Membalik urutan vektor \mathbf{A} dan \mathbf{B} menghasilkan vektor satuan yang berlawanan arahnya dengan semula, sehingga perkaliannya tidak komutatif karena $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$.

Jika definisi perkalian silang dikenakan pada vektor satuan \mathbf{a}_x dan \mathbf{a}_y maka didapatkan $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$, karena masing-masing vektor besarnya satu dan arahnya saling tegak lurus dan perputaran \mathbf{a}_x ke \mathbf{a}_y menghasilkan arah sumbu z positif, sesuai dengan definisi sistem koordinat putar kanan. Dengan cara yang serupa didapatkan $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$, dan $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$.

Mencari perkalian silang dapat dilakukan dengan lebih mudah menguraikan perkalian silang dari dua vektor \mathbf{A} dan \mathbf{B} sebagai jumlah dari sembilan perkalian silang sederhana yang mengandung dua vektor satuan.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= A_x B_x \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_x + A_x B_y \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y + A_x B_z \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z \\ &\quad + A_y B_x \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x + A_y B_y \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_y + A_y B_z \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z \\ &\quad + A_z B_x \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x + A_z B_y \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y + A_z B_z \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

Telah diketahui bahwa $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$, dan $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$, dan diperoleh juga $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x = -\mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y = -\mathbf{a}_x$, dan $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z = -\mathbf{a}_y$. Ketiga suku lainnya sama dengan nol, karena perkalian silang antara vektor dengan dirinya ialah nol karena sudut diantaranya nol. Hasilnya dapat digabungkan untuk mendapatkan:



$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{a}_z \dots(1.6)$$

atau dapat juga ditulis dalam bentuk determinan yang mudah diingat yaitu,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \dots\dots\dots(1.7)$$

Contoh 1.2. Diberikan vektor

$$\mathbf{A} = 2 \mathbf{a}_x - 3 \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \text{ dan vektor } \mathbf{B} = -4 \mathbf{a}_x - 2 \mathbf{a}_y + 5 \mathbf{a}_z.$$

Hitunglah $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Jawab:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= [(-3)(5) - (1)(-2)] \mathbf{a}_x - [(2)(5) - (1)(-4)] \mathbf{a}_y \\ &\quad + [(2)(-2) - (-3)(-4)] \mathbf{a}_z \\ &= -13 \mathbf{a}_x - 14 \mathbf{a}_y - 16 \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

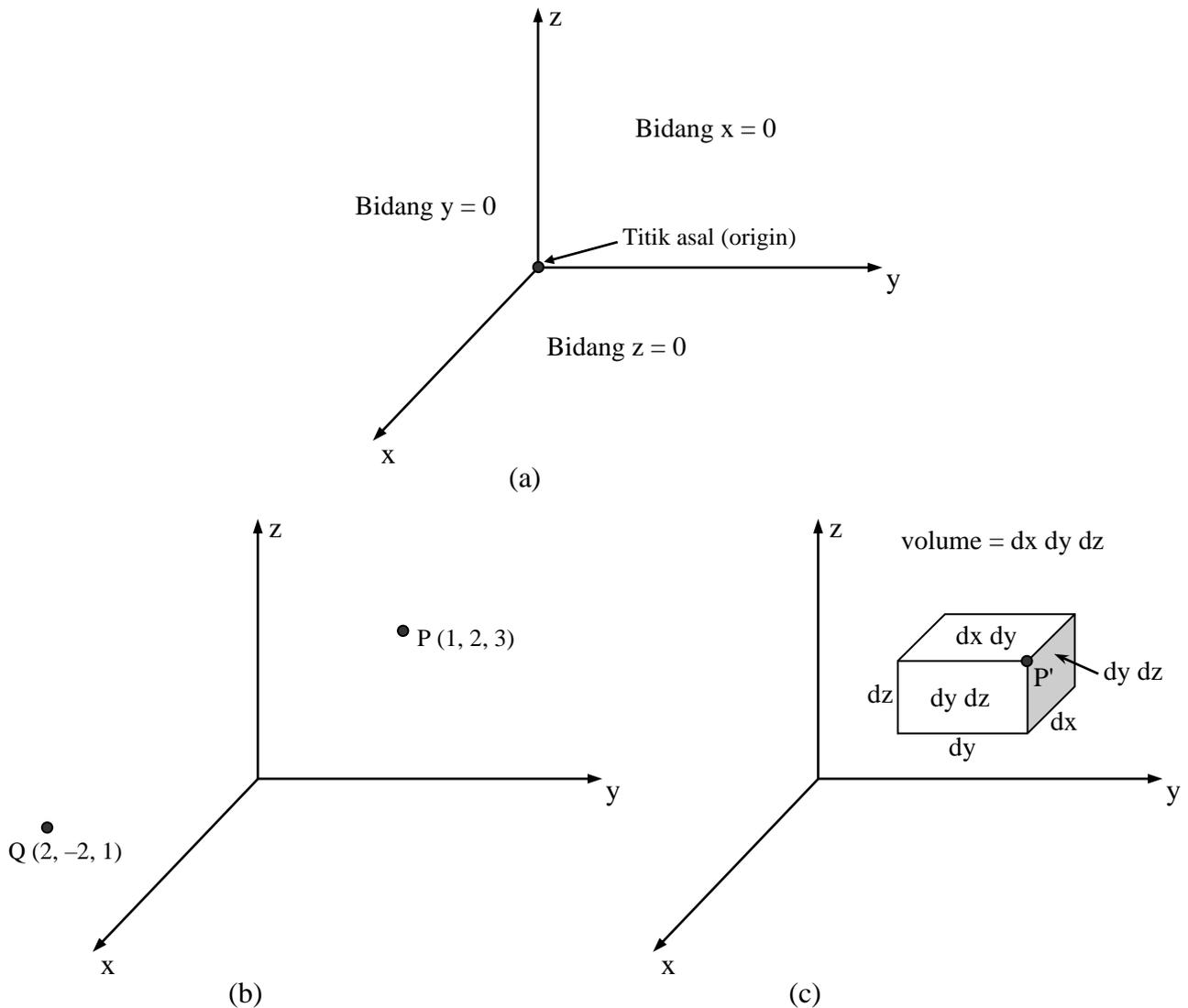
1.3 SISTEM-SISTEM KOORDINAT

1.3.1 Sistem Koordinat Kartesian

Guna menyatakan sebuah vektor dengan tepat maka harus diketahui panjangnya, arahnya, sudutnya, proyeksinya, atau komponennya. Ada tiga metode sederhana untuk menyatakan vektor tersebut dan yang paling sederhana adalah *sistem koordinat kartesian*.

Dalam sistem koordinat kartesian digunakan tiga sumbu koordinat yang saling tegak lurus yang dinamakan sumbu x, y dan z. Dalam hal ini biasanya dipakai sistem koordinat putar kanan, artinya perputaran dari sumbu x ke sumbu y mengakibatkan sekrup putar kanan maju ke arah sumbu z. Dengan menggunakan tangan kanan yang terdiri dari ibu jari, telunjuk, dan jari tengah kita dapat

menyatakan sumbu x , y dan z . Gambar 1.3(a). menunjukkan sistem koordinat kartesian putar kanan.



Gambar 1.3. Sistem koordinat kartesian, (a). Sumbu x , y , dan z dari koordinat kartesian, (b). Letak titik $P(1, 2, 3)$ dan $Q(2, -2, 1)$, dan (c). Elemen volume diferensial dalam koordinat kartesian.

Sebuah titik ditentukan letaknya dengan memberikan koordinat x , y , dan z dari titik tersebut. Besaran itu menyatakan jarak dari titik asal (*origin*) ke perpotongan dari garis lurus yang ditarik dari titik tersebut tegak lurus pada sumbu x , kemudian y dan z . Metode lain untuk mengartikan harga koordinat tersebut dan metode yang harus dipakai dalam mengartikan sistem koordinat yang lain adalah



menganggap titik yang ditinjau sebagai perpotongan dari tiga bidang yaitu bidang $x = \text{tetapan}$, $y = \text{tetapan}$, dan $z = \text{tetapan}$. Tetapan itu merupakan harga koordinat untuk titik tersebut.

Gambar 1.3(b). menunjukkan titik P dan Q yang koordinatnya adalah (1, 2, 3) dan (2, -2, 1). Titik P merupakan titik potong dari bidang $x = 1$, $y = 2$, dan $z = 3$, sedang titik A terletak pada perpotongan bidang $x = 2$, $y = -2$, dan $z = 1$.

Bayangkan tiga bidang perpotongan di titik P yang koordinatnya x , y dan z , kemudian tambahkan masing-masing koordinat tersebut dengan besaran diferensial untuk mendapatkan bidang baru yang bergeser sedikit dari bidang emula. Perpotongan bidang baru ini dinamakan titik P' yang koordinatnya $x + dx$, $y + dy$, dan $z + dz$. Keenam bidang tersebut membentuk sebuah balok yang volumenya $dv = dx \, dy \, dz$, permukaannya dS yang terdiri dari $dx \, dy$, $dy \, dz$, dan $dz \, dx$, dan jarak dL dari P ke P' yang merupakan garis diagonal dari balok tersebut yang panjangnya $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$. Elemen volume dalam sistem koordinat kartesian ditunjukkan pada gambar 1.3(c). Dalam gambar tersebut diperlihatkan titik P', sedang titik P terletak pada sudut yang tidak terlihat.

Guna menyatakan sebuah vektor dalam sistem koordinat kartesian, tinjau sebuah vektor \mathbf{r} yang arahnya ke luar dari titik asal. Vektor-vektor komponen dari vektor \mathbf{r} ialah \mathbf{x} , \mathbf{y} , dan \mathbf{z} , dan penjumlahan ketiga vektor komponen tersebut $\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$, seperti terlihat pada gambar 1.4(a).

Suatu vektor satuan yakni vektor dengan harga absolut satu dinyatakan dengan notasi \mathbf{a} dan arahnya dinyatakan oleh subskrip yang bersangkutan. Dalam sistem koordinat kartesian, vektor-vektor satuannya adalah \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y , dan \mathbf{a}_z . Vektor-vektor tersebut sejajar dengan sumbu x , y , dan z sesuai dengan subskripnya seperti terlihat pada gambar 1.4(b).

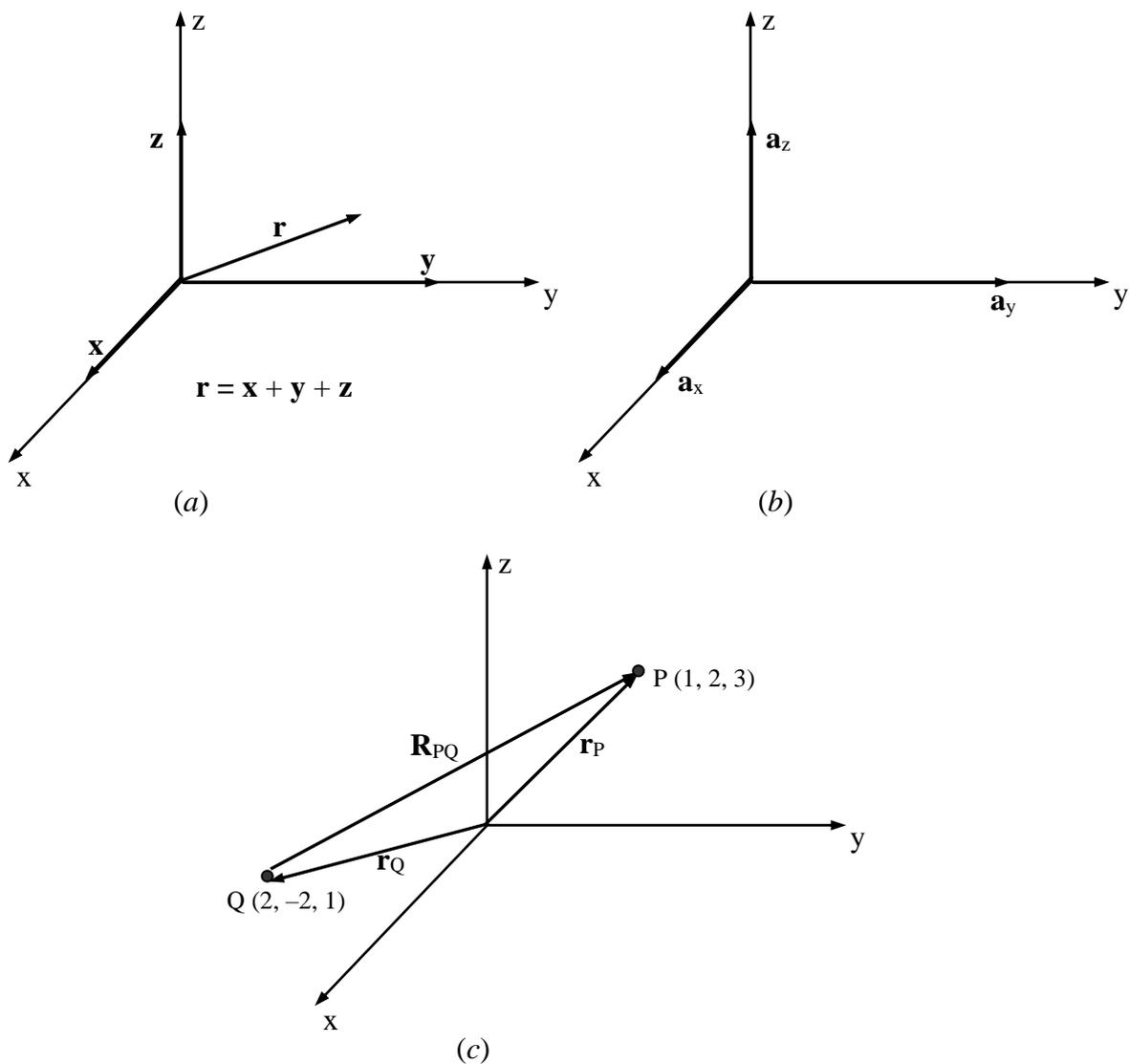
Jika vektor \mathbf{y} besarnya dua satuan dan arahnya searah dengan bertambahnya harga y , maka ditulis $\mathbf{y} = 2 \mathbf{a}_y$. Sebuah vektor \mathbf{r}_P yang arahnya ditentukan oleh penghubung antara titik asal dengan titik P (1, 2, 3) dapat ditulis $\mathbf{r}_P = \mathbf{a}_x + 2 \mathbf{a}_y + 3 \mathbf{a}_z$. Vektor yang menghubungkan titik P dan Q didapatkan dengan memakai aturan penjumlahan vektor. Aturan ini menyatakan vektor dari titik asal

ke titik P ditambah dengan vektor dari titik P ke titik Q sama dengan vektor dari titik asal ke titik Q.

Vektor dari titik P (1, 2, 3) ke titik Q (2, -2, 1) ialah:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{PQ} &= \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P \\ &= (2 - 1) \mathbf{a}_x + (-2 - 2) \mathbf{a}_y + (1 - 3) \mathbf{a}_z \\ &= \mathbf{a}_x - 4 \mathbf{a}_y - 2 \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

Vektor \mathbf{r}_Q , \mathbf{r}_P , dan \mathbf{R}_{PQ} dapat dilihat pada gambar 1.4(c).



Gambar 1.4. Komponen vektor dan vektor satuan. (a). Vektor \mathbf{x} , \mathbf{y} , dan \mathbf{z} dari vektor \mathbf{r} , (b). Vektor satuan dari sistem koordinat katresian, dan (c). Vektor \mathbf{R}_{PQ} sama dengan beda vektor $\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P$.



Suatu vektor \mathbf{B} dapat dituliskan sebagai $\mathbf{B} = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z$. Vektor komponennya ialah $B_x \mathbf{a}_x$, $B_y \mathbf{a}_y$, dan $B_z \mathbf{a}_z$. Besar \mathbf{B} dapat ditulis sebagai $|\mathbf{B}|$ atau B dan dapat dinyatakan sebagai:

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad \dots\dots\dots(1.8)$$

Vektor satuan dalam arah \mathbf{B} dapat dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{a}_B = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} \quad \dots\dots\dots(1.9)$$

Contoh 1.3. Diberikan titik B menempati koordinat (2, -2, -1). Tentukan vektor satuan yang mengarah dari titik asal ke titik B.

Jawab:

Suatu vektor satuan yang mempunyai arah dari titik asal ke titik B (2, -2, -1) didapatkan dengan menyatakan vektor \mathbf{B} dari titik asal ke titik B (2, -2, -1), yaitu $\mathbf{B} = 2 \mathbf{a}_x - 2 \mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$.

Kemudian besar $|\mathbf{B}|$ dicari, yaitu $|\mathbf{B}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$.

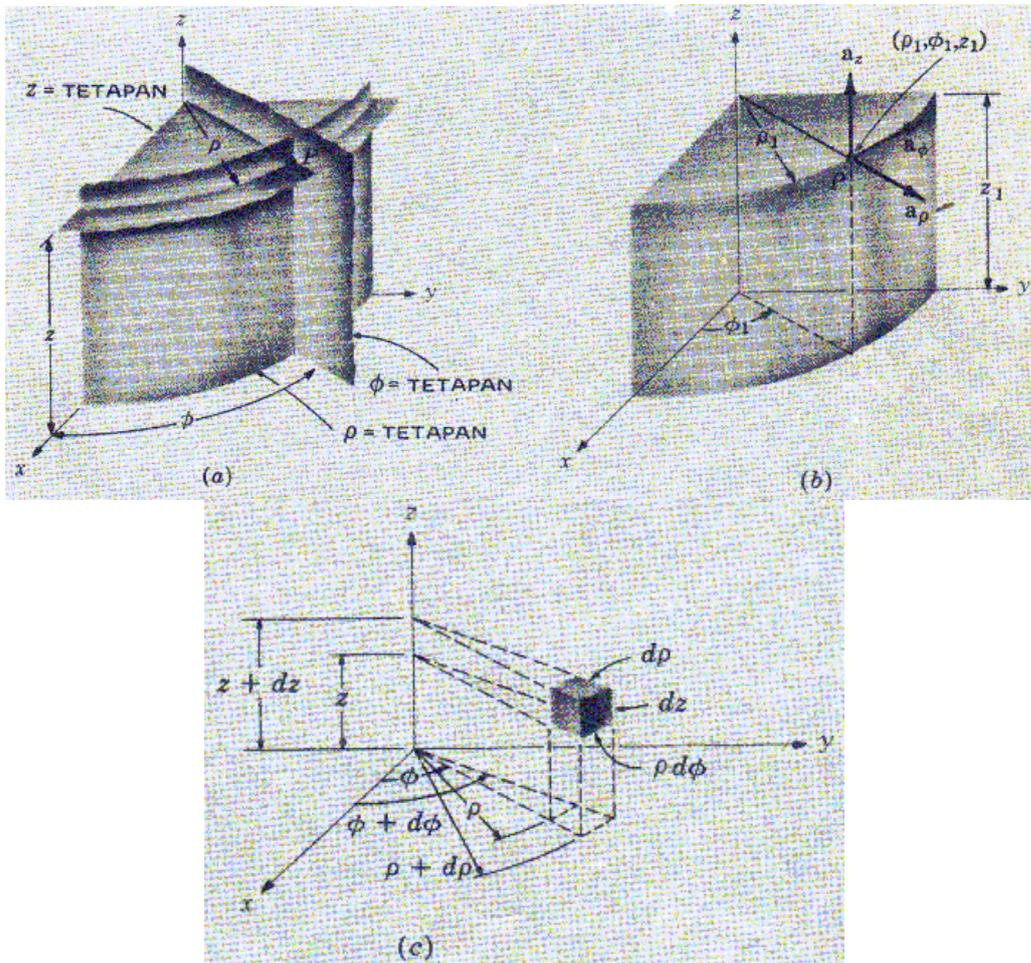
Akhirnya didapatkan vektor satuannya sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_B = \frac{2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z}{3} = 0,667 \mathbf{a}_x - 0,667 \mathbf{a}_y - 0,333 \mathbf{a}_z$$

1.3.2 Sistem Koordinat Tabung

Sistem koordinat tabung (silindris) merupakan versi tiga dimensi dari koordinat polar (koordinat kutub) dalam geometri analitik. Dalam koordinat polar dua dimensi, sebuah titik dalam bidang ditentukan oleh jarak ρ dari titik asal, dan sudut ϕ antara garis yang menghubungkan titik asal dengan titik tersebut dan garis radial (sebarang) yang dipilih sebagai acuan (referensi). Dalam sistem koordinat tabung tiga dimensi ditentukan juga jarak z dari titik yang ditinjau dalam bidang $z = 0$ yang merupakan bidang acuan yang tegak lurus pada garis $\rho = 0$. Lengkapnya nama sistem koordinat ini adalah sistem koordinat tabung lingkaran atau biasa disingkat dengan sistem koordinat tabung.

Dalam sistem koordinat tabung, tiap titik dipandang sebagai perpotongan dari tiga bidang yang saling tegak lurus. Ketiga bidang tersebut terdiri atas bidang tabung lingkaran ($\rho = \text{tetapan}$), bidang datar ($\phi = \text{tetapan}$), dan bidang datar lainnya ($z = \text{tetapan}$). Ketiga bidang koordinat tabung ini ditunjukkan dalam gambar 1.5(a). Dapat dilihat bahwa ketiga bidang seperti itu dapat melalui setiap titik kecuali jika titik tersebut terletak pada sumbu z , dalam hal ini hanya satu bidang saja yang diperlukan.



Gambar 1.5. Sistem koordinat tabung. (a).Ketiga bidang saling tegak lurus, (b). Ketiga vektor satuan dalam sistem koordinat katresian, dan (c). Volume diferensial dalam koordinat tabung.

Tiga vektor satuan dalam sistem koordinat tabung yaitu \mathbf{a}_ρ , \mathbf{a}_ϕ , dan \mathbf{a}_z . Vektor satuan \mathbf{a}_ρ pada titik $P(\rho_1, \phi_1, z_1)$ arahnya menjauhi titik asal, normal pada bidang tabung $\rho=\rho_1$. Vektor tersebut terletak pada bidang $\phi=\phi_1$ dan $z=z_1$. Vektor



satuan \mathbf{a}_ϕ normal pada bidang $\phi=\phi_1$, mempunyai arah yang sama dengan arah bertambahnya ϕ , terletak pada $z=z_1$ dan menyinggung permukaan tabung $\rho=\rho_1$. Vektor satuan \mathbf{a}_z sama dengan vektor satuan \mathbf{a}_z dalam koordinat kartesian. Gambar 1.5(b) memperlihatkan tiga vektor satuan dalam koordinat tabung.

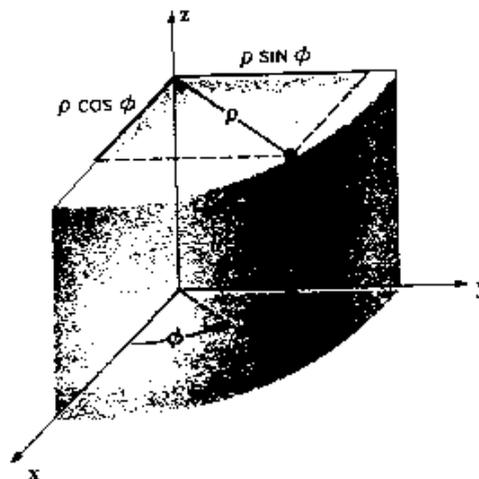
Volume diferensial dalam koordinat tabung diperoleh dengan menambah ρ , ϕ , dan z dengan pertambahan diferensial $d\rho$, $d\phi$, dan dz . Dua buah tabung berjejari ρ dan $\rho + d\rho$, dua buah bidang radial pada sudut ϕ dan $\phi + d\phi$, dan dua buah bidang horizontal pada ketinggian z dan $z + dz$ membatasi volume kecil seperti terlihat pada gambar 1.5(c). yang berbentuk potongan kayu. Jika volumenya sangat kecil maka bentuknya seperti kotak yang panjang sisi-sisinya $d\rho$, $d\phi$, dan dz . Luas permukaannya $\rho d\rho d\phi$, $d\rho dz$, dan $\rho d\phi dz$. dan volumenya menjadi $\rho d\rho d\phi dz$.

Peubah (variabel) dalam koordinat kartesian dan koordinat tabung dapat dicari hubungannya. Dengan menunjuk pada gambar 1.6 dapat dilihat bahwa:

$$x = \rho \cos \phi \quad \dots\dots\dots(1.10)$$

$$y = \rho \sin \phi \quad \dots\dots\dots(1.11)$$

$$z = z \quad \dots\dots\dots(1.12)$$



Gambar 1.6. Hubungan antara peubah koordinat kartesian dan peubah koordinat tabung.

Dari sudut pandang lain dapat dinyatakan peubah koordinat tabung dalam x , y , dan z sebagai berikut:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\rho \geq 0) \quad \dots\dots\dots(1.13)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad \dots\dots\dots(1.14)$$

$$z = z \quad \dots\dots\dots(1.15)$$

Dengan menggunakan persamaan (1.10) dan persamaan (1.11) fungsi skalar yang dinyatakan dalam suatu sistem koordinat dapat ditransformasikan ke sistem koordinat lainnya. Suatu fungsi vektor memerlukan dua langkah untuk mentransformasikannya ke sistem koordinat lain, karena diperlukan himpunan vektor komponen yang berbeda.

Diberikan vektor dalam koordinat kartesian:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$$

dengan masing-masing komponen merupakan fungsi dari x , y , dan z , maka diperlukan vektor dalam koordinat tabung.

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z$$

dengan masing-masing komponen merupakan fungsi dari ρ , ϕ , dan z .

Komponen dari sebuah vektor dapat dicari dengan mengambil perkalian titik antara vektor tersebut dengan vektor satuan dalam arah yang diinginkan. Jadi,

$$A_\rho = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\rho \quad \text{dan} \quad A_\phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\phi$$

Dengan menguraikan perkalian titik tersebut kita dapatkan:

$$A_\rho = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\rho = A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho \quad \dots\dots\dots(1.16)$$

$$A_\phi = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\phi = A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi \quad \dots\dots\dots(1.17)$$

$$A_z = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_z = A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z \quad \dots\dots\dots(1.18)$$

karena $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho$ dan $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi$ adalah nol.

Supaya dapat menyelesaikan transformasi komponen, perlu diketahui perkalian titik antar vektor satuan dalam sistem koordinat kartesian dan sistem koordinat tabung seperti terlihat pada tabel 1.1.



Tabel 1.1. Perkalian Titik antara Vektor Satuan dalam Sistem Koordinat Kartesian dan Sistem Koordinat Tabung

	\mathbf{a}_ρ	\mathbf{a}_ϕ	\mathbf{a}_z
$\mathbf{a}_x \cdot$	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	0
$\mathbf{a}_y \cdot$	$\sin \phi$	$\cos \phi$	0
$\mathbf{a}_z \cdot$	0	0	1

Contoh 1.4. Transformasikan vektor $\mathbf{B} = y \mathbf{a}_x - x \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z$ ke koordinat tabung.

Jawab:

Komponen dalam sistem koordinat tabungnya adalah:

$$\mathbf{B}_\rho = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_\rho = y (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho) - x (\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho)$$

$$= y \cos \phi - x \sin \phi = \rho \sin \phi \cos \phi - \rho \cos \phi \sin \phi = 0$$

$$\mathbf{B}_\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_\phi = y (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi) - x (\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi)$$

$$= -y \sin \phi - x \cos \phi = -\rho \sin^2 \phi \cos \phi - \rho \cos^2 \phi = -\rho$$

Jadi,

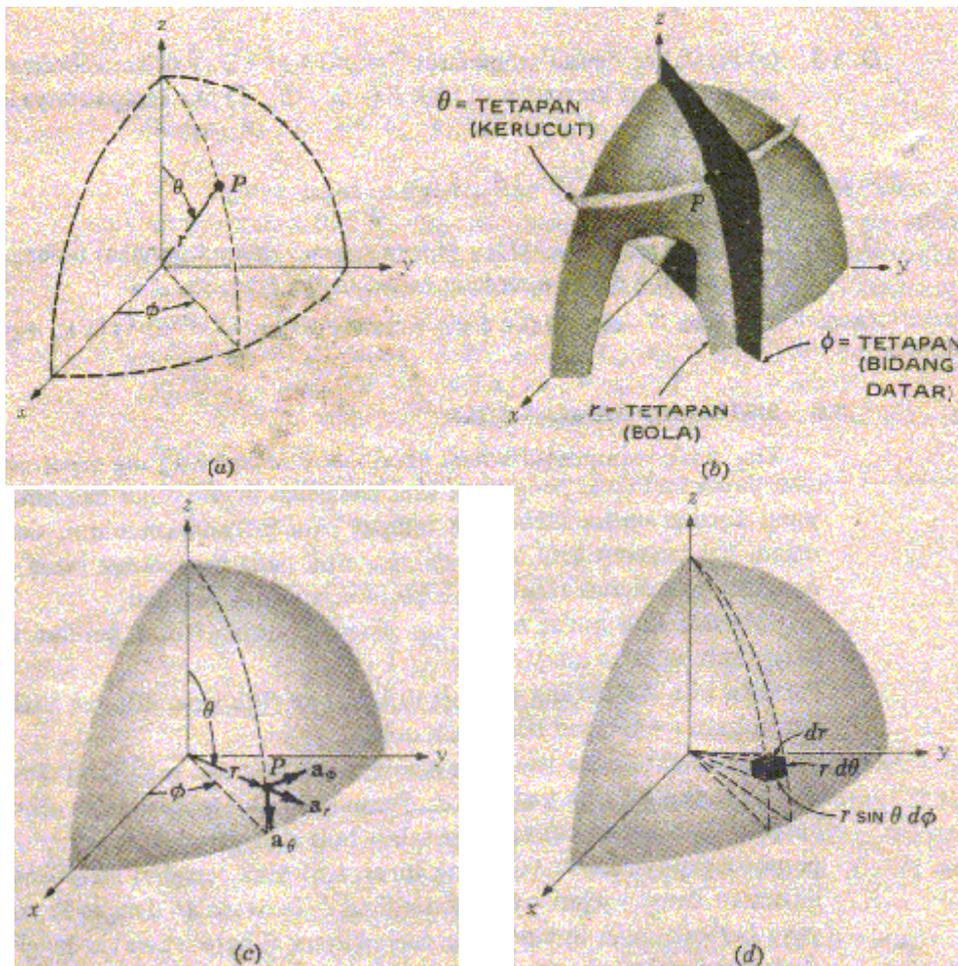
$$\mathbf{B} = -\rho \mathbf{a}_\phi + z \mathbf{a}_z$$

1.3.3 Sistem Koordinat Bola

Sistem koordinat bola dapat dibangun berdasarkan ketiga sumbu kartesian seperti terlihat pada gambar 1.7(a). Pertama-tama didefinisikan r sebagai jarak dari titik asal ke titik yang ditinjau. Permukaan $r = \text{tetapan}$ adalah sebuah bola. Koordinat kedua ialah sudut θ antara sumbu z dan garis yang ditarik dari titik asal ke titik yang ditinjau. Permukaan $\theta = \text{tetapan}$ ialah sebuah kerucut, dan kedua permukaan tersebut bola dan kerucut, di setiap titik perpotongannya selalu saling tegak lurus. Titik-titik tersebut membentuk lingkaran dengan jejari $r \sin \theta$. Koordinat θ bersesuaian dengan lintang, bedanya ialah lintang diukur dari ekuator (khatulistiwa) sedang θ diukur dari kutub utara. Koordinat ketiga yaitu ϕ juga merupakan sudut yang definisinya tetap sama dengan ϕ untuk koordinat tabung. Sudut tersebut ialah sudut antara sumbu x dengan garis proyeksi dari garis yang

menghubungkan titik asal dengan titik yang ditinjau pada bidang $z = 0$. Besarnya sesuai dengan sudut bujur, hal yang berbeda adalah sudut ϕ bertambah ke arah timur. Permukaan $\phi = \text{tetapan}$ ialah sebuah bidang datar yang melalui garis $\theta = 0$ (atau sumbu z).

Dalam sistem koordinat bola terdapat tiga bidang yang saling tegak lurus yaitu bola, kerucut, dan bidang datar seperti terlihat pada gambar 1.7(b). Gambar 1.7(c) menunjukkan tiga vektor satuan dalam koordinat bola. Ketiga vektor satuan tersebut saling tegak lurus dan dalam sistem koordinat putar kanan berlaku $\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi$.



Gambar 1.7. Sistem koordinat bola. (a).Ketiga koordinat bola, (b). Ketiga bidang yang saling tegak lurus pada sistem koordinat bola, (c). Ketiga vektor satuan koordinat bola, dan (d) Elemen volume diferensial pada sistem koordinat bola.



Elemen volume diferensial dapat dibangun dalam koordinat bola dengan memperhatikan pertambahan r , θ , dan ϕ dengan dr , $d\theta$, dan $d\phi$ seperti terlihat pada gambar 1.7(d). Jarak antara dua permukaan bola dengan jejari r dan $r + dr$ ialah dr , jarak antara dua permukaan kerucut dengan sudut puncak yang ditentukan oleh θ dan $\theta + d\theta$ ialah $r d\theta$, dan jarak antara dua bidang datar radial pada sudut ϕ dan $\phi + d\phi$ didapatkan $r \sin \theta d\phi$ dengan menggunakan cara trigonometri. Permukaan batasnya mempunyai luas $r dr d\theta$, $r \sin \theta dr d\phi$, dan $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$. Volumennya ialah $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$.

Transformasi skalar dari sistem koordinat kartesian ke koordinat bola dapat dilakukan dengan memperhatikan gambar 1.7(a) yang menghubungkan kedua himpunan peubah:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad \dots\dots\dots(1.19)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad \dots\dots\dots(1.20)$$

$$z = r \cos \theta \quad \dots\dots\dots(1.21)$$

Transformasi sebaliknya didapat melalui hubungan:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (r \geq 0) \quad \dots\dots\dots(1.22)$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ) \quad \dots\dots\dots(1.23)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad \dots\dots\dots(1.24)$$

Peubah jejari r selalu positif atau nol, θ bergerak antara 0° sampai dengan 180° . Sudut tersebut ditentukan kuadrannya sesuai dengan hanya x , y , dan z .

Tabel 1.2. Perkalian Titik antara Vektor Satuan dalam Sistem Koordinat Kartesian dan Sistem Koordinat Bola

	\mathbf{a}_r	\mathbf{a}_θ	\mathbf{a}_ϕ
$\mathbf{a}_x \cdot$	$\sin \theta \cos \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	$-\sin \phi$
$\mathbf{a}_y \cdot$	$\sin \theta \sin \phi$	$\cos \theta \sin \phi$	$\cos \phi$
$\mathbf{a}_z \cdot$	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0

Transformasi vektor memerlukan harga perkalian dari vektor satuan dalam koordinat kartesian dengan vektor satuan dalam koordinat bola, dengan memperhatikan gambar 1.7(c). Karena perkalian titik antara vektor satuan dalam koordinat bola dengan vektor satuan dalam koordinat kartesian menghasilkan komponen vektor satuan bola dalam arah vektor satuan kartesian, maka perkalian dengan \mathbf{a}_z menghasilkan:

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = \cos \theta$$

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta = -\sin \theta$$

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$$

Perkalian titik vektor satuan dalam koordinat bola dan koordinat kartesian selengkapnya dapat dilihat pada tabel 1.2.

Contoh 1.4. Transformasikan vektor $\mathbf{G} = (xy/z) \mathbf{a}_x$ ke dalam koordinat bola.

Jawab:

Kita dapatkan ketiga komponen bola dengan perkalian skalar antara \mathbf{G} dengan vektor satuan yang bersangkutan, kemudian lakukan perubahan:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_r &= \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_r = \frac{xz}{y} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r = \frac{xz}{y} \sin \theta \cos \phi \\ &= r \sin \theta \cos \theta \frac{\cos^2 \phi}{\sin \phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\theta &= \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_\theta = \frac{xz}{y} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta = \frac{xz}{y} \cos \theta \cos \phi \\ &= r \cos^2 \theta \frac{\cos^2 \phi}{\sin \phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\phi &= \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_\phi = \frac{xz}{y} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi = \frac{xz}{y} (-\sin \phi) \\ &= -r \cos \theta \cos \phi \end{aligned}$$

Dengan menggabungkannya, diperoleh:

$$\mathbf{G} = r \cos \theta \cos \phi (\sin \theta \cot \phi \mathbf{a}_r + \cos \theta \cot \phi \mathbf{a}_\theta - \mathbf{a}_\phi)$$



Latihan:

- 1.1. Diberikan vektor-vektor $\mathbf{A} = 2 \mathbf{a}_x - 5 \mathbf{a}_y + 3 \mathbf{a}_z$, $\mathbf{B} = -5 \mathbf{a}_x - 3 \mathbf{a}_y + 5 \mathbf{a}_z$, dan $\mathbf{C} = \mathbf{a}_x + 3 \mathbf{a}_y + 5 \mathbf{a}_z$. Tentukan $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ dan $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$.
- 1.2. Diketahui $P(6, 125^\circ, -3)$ dan $Q(3, -1, 4)$. Tentukan jarak dari (a) P ke titik asal, (b) Q tegak lurus pada sumbu z, dan (c) P ke Q.
- 1.3. Diketahui $P(6, 110^\circ, 125^\circ)$ dan $Q(3, -1, 4)$. Tentukan jarak dari (a) Q ke titik asal, (b) P ke bidang $y = 0$, dan (c) P ke Q.
- 1.4. Nyatakan medan vektor $\mathbf{W} = (x - y) \mathbf{a}_y$ dalam koordinat: (a) tabung di $(6, 60^\circ, -4)$, dan (b) bola di $(4, 30^\circ, 120^\circ)$.

« halaman ini sengaja dikosongkan »



BAB II

HUKUM COULOMB

DAN INTENSITAS MEDAN ELEKTRIK

2.1 HUKUM EKSPERIMENTAL COULOMB

Coulomb menyatakan bahwa gaya antara dua benda yang sangat kecil dalam ruang hampa yang terpisah pada jarak yang besar dibandingkan dengan ukurannya berbanding lurus dengan muatan masing-masing benda tersebut dan berbanding terbalik dengan jarak kuadrat, dinyatakan dalam persamaan berikut.

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \dots\dots\dots(2.1)$$

dengan Q_1 dan Q_2 adalah besaran muatan negatif atau positif, R menyatakan jarak yang memisahkannya, dan k adalah konstanta pembanding. Konstanta k dapat dinyatakan,

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \dots\dots\dots(2.2)$$

dan ϵ_0 adalah permitivitas ruang hampa yang besarnya

$$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ F/m} \dots\dots\dots(2.3)$$

Sehingga Hukum Coulomb sekarang dapat ditulis sebagai berikut [1]-[3].

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \dots\dots\dots(2.4)$$

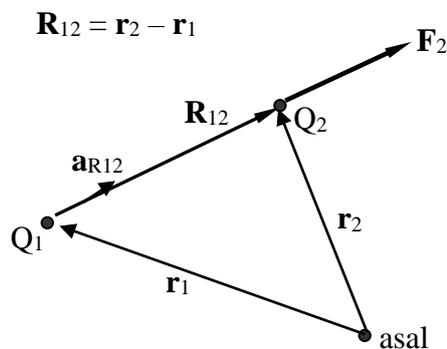
Agar persamaan (2.4) dapat ditulis dalam bentuk vektor, diperlukan fakta lain bahwa gaya tersebut beraksi sepanjang garis yang menghubungkan kedua muatan tersebut dan merupakan gaya tolak, jika muatannya mempunyai tanda yang sama dan gaya tarik jika tandanya berlawanan. Gunakan vektor \mathbf{r}_1 untuk menyatakan kedudukan Q_1 dan \mathbf{r}_2 untuk kedudukan Q_2 . Maka vektor $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ menyatakan segmen garis yang arahnya dari Q_1 ke Q_2 seperti ditunjukkan pada gambar 2.1. Vektor \mathbf{F}_2 menyatakan gaya yang bekerja pada Q_2 dan

pada gambar tersebut ditunjukkan untuk kasus Q_1 dan Q_2 yang mempunyai tanda yang sama. Bentuk vektor dari hukum Coulomb ialah:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{12} \quad \dots\dots\dots(2.5)$$

dengan \mathbf{a}_{12} menyatakan vektor satuan dalam arah \mathbf{R}_{12} , atau

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad \dots\dots\dots(2.6)$$



Gambar 2.1. Arah vektor gaya \mathbf{F}_2 pada Q_2 sama dengan arah vektor \mathbf{R}_{12} .

Contoh 2.1. Tinjaulah muatan sebesar 3×10^{-4} C pada titik P (1, 2, 3) dan muatan sebesar -10^{-4} C pada titik Q (2, 0, 5) dalam vakum. Tentukan gaya pada titik Q dan P.

Jawab:

Berdasarkan soal di atas diketahui bahwa:

$$Q_1 = 3 \times 10^{-4} \text{ C} \qquad Q_2 = -10^{-4} \text{ C}$$

Maka vektor jarak dari titik P ke titik Q adalah:

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (2 - 1)\mathbf{a}_x + (0 - 2)\mathbf{a}_y + (5 - 3)\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

dan vektor satuannya:

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3}$$

Sehingga gaya pada titik Q adalah:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{3 \times 10^{-4} (-10^{-4})}{4\pi(1/36\pi)10^{-9} \times 9} \left(\frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3} \right)$$



$$= -30 \left(\frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3} \right) \quad \text{N}$$

Besarnya gaya tersebut ialah 30 N dan arahnya ditentukan oleh vektor satuan yang dibiarkan dalam tanda kurung untuk menunjukkan besar vektor tersebut. Gaya pada Q_2 dapat juga dipandang sebagai gaya dengan tiga komponen, yaitu:

$$\mathbf{F}_2 = -10 \mathbf{a}_x + 20 \mathbf{a}_y - 20 \mathbf{a}_z \quad \text{N}$$

Gaya yang dinyatakan dalam hukum Coulomb merupakan gaya timbal balik karena masing-masing muatan tersebut mengalami gaya yang besarnya sama tetapi arahnya berlawanan, sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{21} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{12} \quad \dots\dots\dots(2.7)$$

2.2 INTENSITAS MEDAN ELEKTRIK

Jika kita meninjau suatu muatan dalam kedudukan tetap, misalnya Q_1 , dan menggerakkan muatan kedua lambat mengelilinginya, kita akan mendapatkan bahwa dimanapun muatan kedua ini ditempatkan selalu ada gaya yang bertumpu pada muatan tersebut; dengan kata lain muatan kedua ini menunjukkan adanya medan gaya. Jika muatan kedua adalah Q_2 , gaya yang bertumpu padanya dapat dinyatakan dengan hukum Coulomb [1]-[3]:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{12} \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

Bila kita tulis gaya yang bertumpu pada satu satuan muatan adalah:

$$\frac{\mathbf{F}_2}{Q_2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{12} \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

Hal tersebut menggambarkan sebuah medan vektor yang disebut Intensitas Medan Elektrik. Intensitas medan elektrik didefinisikan sebagai gaya vektor yang bertumpu pada satuan muatan uji yang positif. Intensitas medan elektrik diukur dalam satuan newton per coulomb atau gaya per satuan muatan, dan dalam satuan

yang praktis dinyatakan dalam satuan volt per meter (V/m). Dengan memakai huruf besar E untuk intensitas medan elektrik, dapat dituliskan persamaannya sebagai berikut,

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_t}{Q_t} \dots\dots\dots(2.10)$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{1t}^2} \mathbf{a}_{1t} \dots\dots\dots(2.11)$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \dots\dots\dots(2.12)$$

Perlu diingat bahwa R ialah besar vektor \mathbf{R} yang merupakan segmen garis yang arahnya dari tempat kedudukan Q ke titik tempat \mathbf{E} yang diinginkan, dan \mathbf{a}_R merupakan vektor satuan dalam arah \mathbf{R} .

2.3 MEDAN ELEKTRIK DARI n MUATAN TITIK

Karena gaya Coulomb adalah linear intensitas medan elektrik yang disebabkan oleh dua muatan titik, Q_1 di \mathbf{r}_1 dan Q_2 di \mathbf{r}_2 adalah jumlah gaya pada muatan Q_t yang ditimbulkan oleh Q_1 dan Q_2 yang bekerja sendiri-sendiri, atau

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \mathbf{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^2} \mathbf{a}_2 \dots\dots\dots(2.13)$$

dengan \mathbf{a}_1 dan \mathbf{a}_2 menyatakan vektor unit masing-masing dalam arah $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ dan $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$. Vektor-vektor tersebut terlihat pada gambar 2.2.

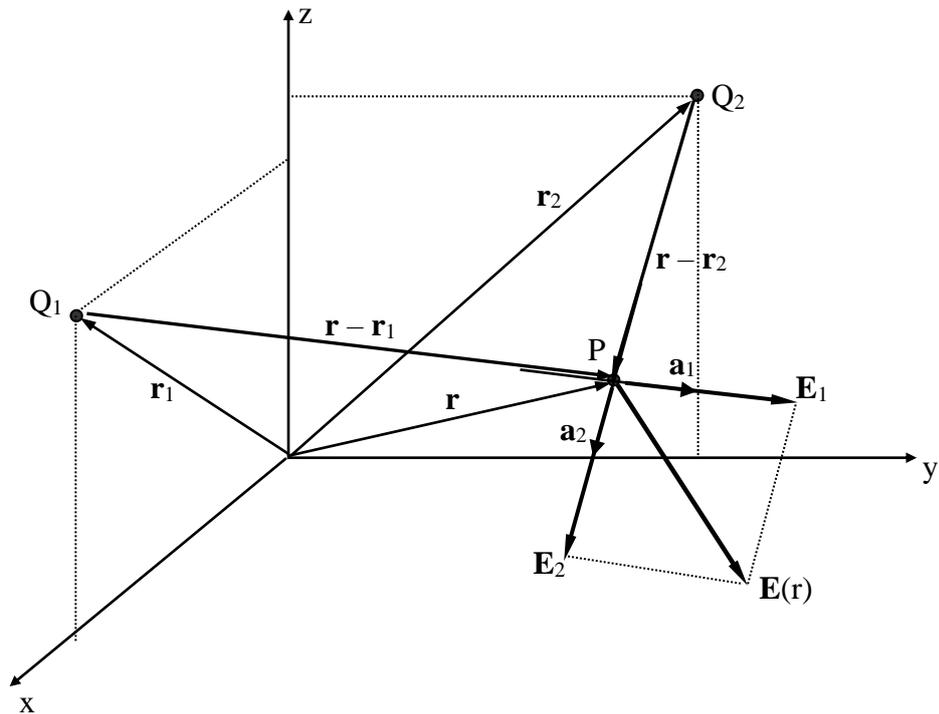
Jika ditambahkan lebih banyak muatan pada kedudukan lain, medan yang disebabkan oleh n muatan titik adalah:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \mathbf{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^2} \mathbf{a}_2 + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^2} \mathbf{a}_n \dots\dots\dots(2.14)$$

atau dapat disingkat menjadi sebagai berikut:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^n \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|^2} \mathbf{a}_m \dots\dots\dots(2.15)$$





Gambar 2.2. Penjumlahan vektor dari medan elektrik yang ditimbulkan oleh Q_1 dan Q_2 .

2.4 MEDAN DISTRIBUSI MUATAN

2.4.1 Medan Muatan Volume

Kerapatan muatan volume (ρ_v) diukur dalam coulomb per meter kubik (C/m^3). Sejumlah kecil muatan ΔQ dalam volume kecil Δv ialah:

$$\Delta Q = \rho_v \Delta v \quad \dots\dots\dots(2.16)$$

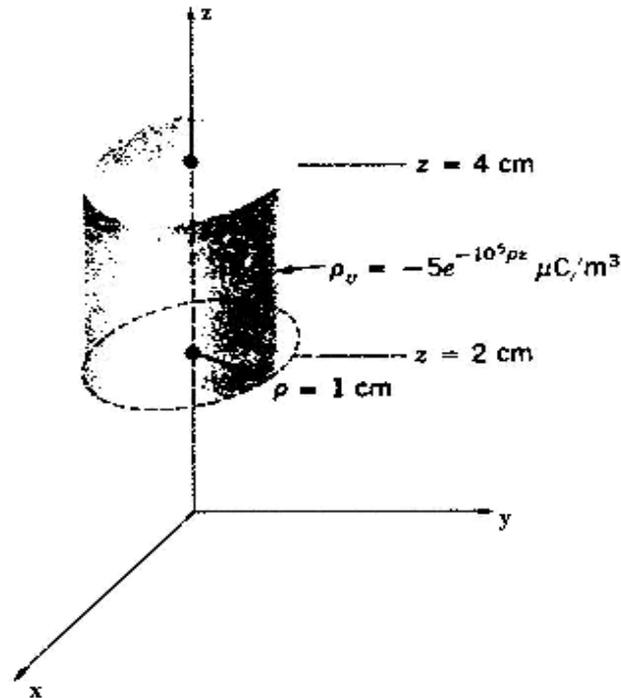
dan kita dapat mendefinisikan secara ρ_v matematik dengan mengambil limit dari persamaan (2.16) sebagai berikut:

$$\rho_v = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} \quad \dots\dots\dots(2.17)$$

Muatan total dalam volume berhingga didapatkan dengan melakukan integrasi ke seluruh volume tersebut.

$$Q = \int_{vol} dQ = \int_{vol} \rho_v dv \quad \dots\dots\dots(2.18)$$

Sebagai contoh hitungan integral volume, marilah kita cari muatan total dalam berkas elektron yang panjangnya 2 cm seperti terlihat dalam gambar 2.3.



Gambar 2.3. Muatan total di dalam tabung lingkaran

Pada saat tersebut, dimisalkan kerapatan muatan volumenya ialah:

$$\rho_v = -5 \times 10^{-6} e^{-10^5 \rho z} \text{ C/m}^3$$

Volume diferensial dalam koordinat tabung diberikan oleh:

$$Q = \int_{0,02}^{0,04} \int_0^{2\pi} \int_0^{0,01} -5 \times 10^{-6} e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho d\phi dz$$

Pertama, integrasikan terhadap ϕ karena mudah dilakukan,

$$Q = \int_{0,02}^{0,04} \int_0^{0,01} -10^{-5} \pi e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho dz$$

kemudian terhadap z , karena hal ini dapat memudahkan integrasi terhadap ρ ,

$$Q = \int_0^{0,01} \left[\frac{-10^{-5} \pi}{-10^5 \rho} e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho \right]_{z=0,02}^{z=0,04}$$

$$= \int_0^{0,01} -10^{-10} \pi (e^{-2000 \rho} - e^{-4000 \rho}) d\rho$$



Akhirnya,

$$Q = -10^{-10} \pi \left[\frac{e^{-2000 \rho}}{-2000} - \frac{e^{-4000 \rho}}{-4000} \right]_0^{0,01}$$

atau,

$$Q = -10^{-10} \pi \left[\frac{1}{2000} - \frac{1}{4000} \right] = \frac{-\pi}{40} \quad \text{pC}$$

Sebagai perkiraan kasar, jika kita anggap elektron ini bergerak dengan kecepatan tetap yaitu 10 persen kecepatan cahaya, paket yang panjangnya 2 cm ini akan bergerak sejauh 2 cm dalam waktu 2/3 ns (nanodetik), dan arusnya hampir sama dengan hasil bagi:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{-(\pi / 40)10^{-12}}{(2/3)10^{-9}}$$

atau kira-kira 118 μA .

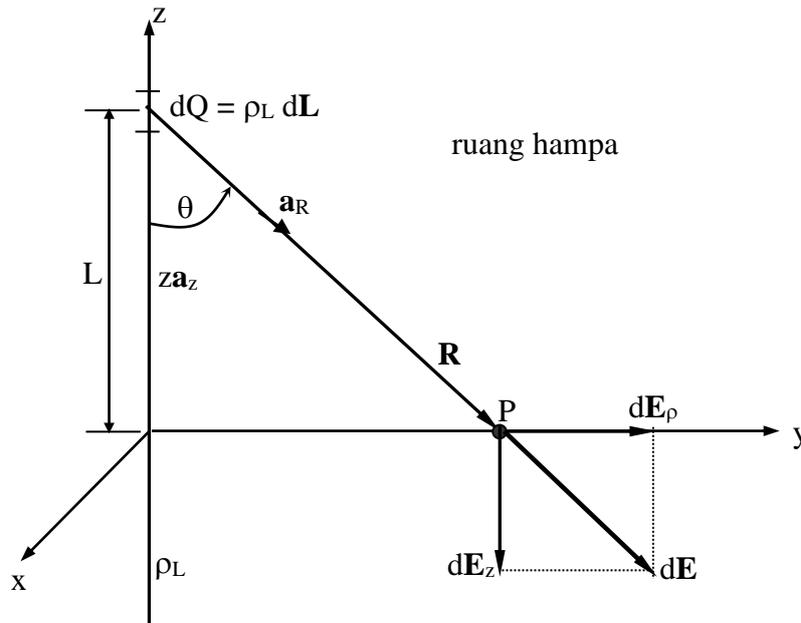
2.4.2 Medan Muatan Garis

Sekarang kita meninjau distribusi dari suatu kerapatan muatan volume yang berbentuk filamen, misalnya berkas yang sangat halus dan tajam dari sebuah tabung sinar katoda atau muatan penghantar (konduktor) yang jejaringnya sangat kecil, akan sangat memudahkan kita jika muatan tersebut kita perlakukan sebagai muatan garis dengan kerapatan ρ_L C/m. Dalam hal berkas elektron, muatan tersebut dalam keadaan bergerak dan sebetulnya kita tidak berhadapan dengan persoalan elektrostatik. Namun jika gerak elektron tersebut merupakan gerak lunak dan serbasama (berkas searah) dan kita abaikan sementara medan magnetik yang timbul, maka berkas elektron tersebut dapat dipandang terdiri dari elektron stasioner, karena gambaran sesaat yang diambil tiap waktu akan menunjukkan distribusi muatan yang sama.

Tinjaulah muatan garis yang memanjang sepanjang sumbu z dalam sistem koordinat tabung dari $-\infty$ ke $+\infty$, seperti terlihat pada gambar 2.4. Kita ingin mencari intensitas medan elektrik \mathbf{E} pada tiap titik yang ditimbulkan oleh muatan garis serbasama dengan kerapatan ρ_L . Berdasarkan gambar 2.4 tersebut kita

dapatkan bahwa komponen medan elektriknya hanya E_ρ saja, dan besaran ini berubah terhadap ρ .

Guna mencari komponen E_ρ , perhatikan gambar 2.4. Kita pilih titik P pada sumbu y sebagai tempat menentukan medan elektrik. Titik ini merupakan titik umum jika kita pandang bahwa medan tersebut tidak berubah terhadap ϕ dan z.



Gambar 2.4. Muatan garis yang memanjang sepanjang sumbu z.

Dengan menggunakan persamaan (2.12) untuk mencari unsur pertambahan medan di P yang disebabkan unsur muatan $dQ = \rho_L dL$, kita dapatkan,

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

atau

$$dE_\rho = \frac{\rho_L dL \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{y}{R} = \frac{\rho_L dL \rho}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Dengan mengganti R^2 dengan $L^2 + \rho^2$ dan menjumlahkan sumbangan (kontribusi) dari tiap unsur muatan, didapatkan:

$$E_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L \rho dL}{4\pi\epsilon_0 (L^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

Pengintegrasian dengan tabel integral atau perubahan $L = \rho \cot \theta$ menghasilkan



$$E_{\rho} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \rho \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{L}{\sqrt{L^2 + \rho^2}} \right)_{-\infty}^{\infty}$$

dan

$$E_{\rho} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \dots\dots\dots(2.19)$$

Banyak cara yang dapat digunakan untuk mendapatkan jawaban persamaan mencari E_{ρ} . Cara di atas merupakan satu di antaranya.

2.4.3 Medan Muatan Bidang

Konfigurasi muatan dasar yang lain ialah muatan yang tersebar merata pada bidang tak terhingga dengan kerapatan serbasama ρ_s C/m². Distribusi muatan seperti itu biasanya dipakai untuk menghampiri distribusi muatan pada konduktor dalam saluran transmisi pipih atau kapasitor keping sejajar. Muatan statik berada pada permukaan penghantar dan bukan di dalam penghantar tersebut, karena itu ρ_s kita sebut sebagai kerapatan muatan permukaan. Rumpun distribusi muatan yang dibahas sekarang telah lengkap yaitu titik, garis, permukaan, dan volume atau Q, ρ_L , ρ_s , dan ρ .

Mari kita letakkan lembaran muatan pada bidang yz (gambar 2.5). Medannya tidak berubah terhadap y maupun z. Komponen-komponen y dan z yang ditimbulkan oleh unsur muatan diferensial yang letaknya simetri terhadap titik yang sedang kita cari medannya saling meniadakan. Jadi hanya E_x saja yang ada dan komponen ini hanya fungsi dari x saja.

Kerapatan muatan garis atau muatan per satuan panjang adalah

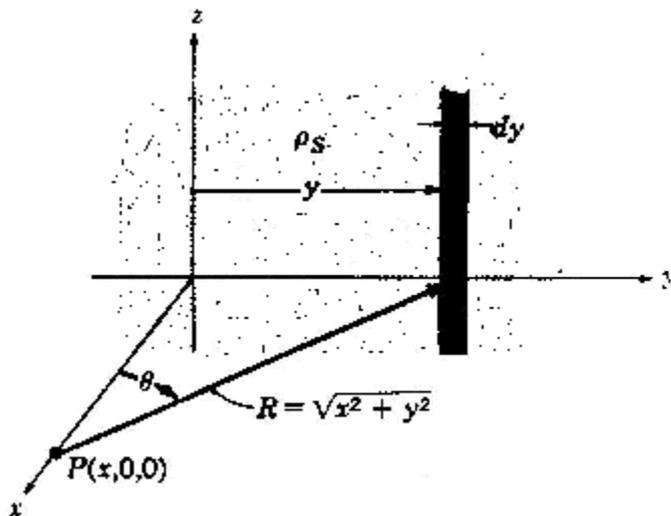
$$\rho_L = \rho_s dy$$

dan jarak dari muatan garis ini ke titik umum P pada sumbu x adalah

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sumbangan pada E_x di P dari pita dengan lebar diferensial ini adalah

$$dE_x = \frac{\rho_s dy}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} \cos\theta = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \frac{x dy}{x^2 + y^2}$$



Gambar 2.5. Penentuan medan di titik P oleh satu lembaran muatan menggunakan persamaan $d\mathbf{E} = \rho_s dy \mathbf{a}_r / 2\pi\epsilon_0 R$.

Penjumlahan efek dari semua pita menghasilkan

$$E_x = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dy}{x^2 + y^2} = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \left[\tan^{-1} \frac{y}{x} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

Jika titik P dipilih pada sumbu x yang negatif, maka

$$E_x = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

karena arah medannya selalu menjauhi muatan positif. Kesukaran dalam tanda ini biasanya diatasi dengan memakai vektor satuan \mathbf{a}_N yang arahnya ke luar dari bidang dan normal pada bidang tersebut. Jadi,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_N \quad \dots\dots\dots(2.20)$$

Jika satu lembaran tak berhingga dari muatan yang kedua yang bermuatan negatif dengan kerapatan $-\rho_s$ ditempatkan pada bidang $x = a$, kita dapatkan medan total dengan menjumlahkan sumbangan (kontribusi) dari masing-masing lembaran muatan tersebut. Pada daerah $x > a$,



$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x \quad \mathbf{E}_- = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = 0$$

dan untuk $x < 0$,

$$\mathbf{E}_+ = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x \quad \mathbf{E}_- = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = 0$$

dan jika $0 < x < a$,

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x \quad \mathbf{E}_- = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \mathbf{a}_x \quad \dots\dots\dots(2.21)$$

Hasil ini merupakan hasil yang penting dan praktis, karena sama dengan medan di antara keping sejajar dari sebuah kaapsitor udara dengan syarat bahwa dimensi linear dari kepingnya jauh lebih besar dari jarak antar keping dan bahwa kita meninjau sebuah titik yang jauh dari tepi. Medan di luar kapasitor tersebut walaupun tidak sama dengan nol seperti yang kita dapatkan untuk kasus yang ideal, biasanya kita abaikan.

Latihan:

- 2.1. Sebuah muatan titik $Q_1 = 2 \text{ mC}$ terletak dalam ruang bebas pada titik $(-3, 7, -4)$ dan $Q_2 = -5 \text{ mC}$ pada titik $(2, 4, -1)$. Hitunglah vektor gaya pada: (a) Q_2 , dan (b) Q_1 .
- 2.2. Hitunglah intensitas medan elektrik pada titik $P(-4, 6, -5)$ dalam ruang bebas yang ditimbulkan oleh muatan sebesar $0,1 \text{ mC}$ pada: (a) titik asal, dan (b) titik $(2, -1, -3)$.
- 2.3. Sebuah muatan titik $Q_1 = 2 \text{ }\mu\text{C}$ terletak dalam ruang bebas pada titik $(-3, 7, -4)$ dan $Q_2 = -5 \text{ mC}$ pada titik $(2, 4, -4)$. Pada titik $(12, 15, 18)$, hitunglah: (a) \mathbf{E} , (b) $|\mathbf{E}|$, (c) \mathbf{a}_E .

- 2.4. Muatan garis serbasama dalam vakum: $\rho_L = 25 \text{ nC/m}$; muatan garis tersebut bersesuaian dengan garis $x = -3 \text{ m}$ dan $z = 4 \text{ m}$. Hitunglah \mathbf{E} yang dinyatakan dalam komponen kartesian pada: (a) titik asal, (b) titik $(2, 15, 3)$, dan (c) titik $(4, 60^\circ, 2)$.
- 2.5. Tentukan medan elektrik \mathbf{E} di titik $(8, 0, 0)$ yang diakibatkan oleh muatan 10 nC yang tersebar secara merata serbasama sepanjang sumbu x di antara $x = -5 \text{ m}$ dan $x = 5 \text{ m}$. Ulangi soal ini dengan menganggap muatan tadi tersebar merata di antara $x = -1 \text{ m}$ dan $x = 1 \text{ m}$.



BAB III

KERAPATAN FLUKS ELEKTRIK, HUKUM GAUSS, DAN DIVERGENSI

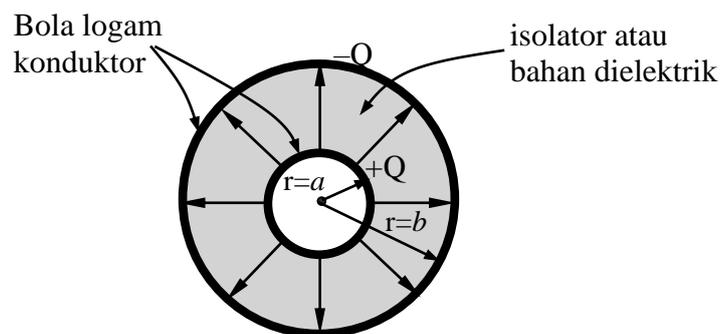
3.1 KERAPATAN FLUKS ELEKTRIK

Faraday menemukan bahwa jika muatan positif yang terdapat pada bola dalam makin banyak, maka muatan tersebut akan menginduksi muatan negatif yang harga mutlaknya makin besar juga, dan menghasilkan perbandingan yang lurus antara fluks elektrik dengan muatan yang terdapat pada bola dalam tersebut.

Fluks elektrik (*electric flux*) bermula di muatan positif dan berakhir di muatan negatif. Dalam ketiadaan muatan negatif, fluks berakhir di takberhingga. Jika fluks elektrik dinyatakan dalam Ψ dan muatan total bola dalam dalam Q maka menurut eksperimen Faraday,

$$\Psi = Q$$

dan fluks elektrik diukur dalam Coulomb.



Gambar 3.1. Fluks elektrik di antara dua bola sepusat konsentris yang bermuatan.

Dalam gambar 3.1 diperlihatkan bola dalam dengan jari-jari a dan bola luar dengan jari-jari b yang mempunyai muatan masing-masing Q dan $-Q$. Lintasan fluks elektrik yang memancar dari bola dalam ke bola luar dinyatakan dengan garis medan yang terbagi secara simetris dan dilukiskan menurut arah radial dari bola

dalam ke bola luar. Pada permukaan bola dalam, fluks elektrik ditimbulkan oleh muatan $Q (= \Psi)$ coulomb yang terbagi serbasama pada permukaan seluas $4\pi a^2$ m². Kerapatan fluks pada permukaan ini adalah $\Psi/4\pi a^2$, atau $Q/4\pi a^2$ C/m².

Dengan memperhatikan gambar 3.1 terlihat bahwa kerapatan fluks elektrik mempunyai radial dan besarnya adalah:

$$\mathbf{D}_{|r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2} \mathbf{a}_r \quad (\text{bola dalam})$$

$$\mathbf{D}_{|r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2} \mathbf{a}_r \quad (\text{bola luar})$$

dan pada jarak radial r , dengan $a \geq r \geq b$

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

Pada bagian sebelumnya telah dibahas bahwa intensitas medan elektrik radial dari sebuah muatan titik dalam ruang hampa ialah:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

Maka dalam ruang hampa, kerapatan fluksnya adalah

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

Untuk distribusi muatan ruang yang umum dalam ruang hampa,

$$\mathbf{E} = \int_{vol} \frac{\rho_v dv}{4\pi \epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

dan kerapatan fluks elektriknya adalah

$$\mathbf{D} = \int_{vol} \frac{\rho_v dv}{4\pi R^2} \mathbf{a}_R \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

dan ini berarti bahwa persamaan (3.3) berlaku untuk setiap konfigurasi muatan dalam ruang hampa, sehingga dapat dianggap bahwa persamaan (3.3) sebagai persamaan yang mendefinisikan \mathbf{D} dalam ruang hampa.



3.2 HUKUM GAUSS

Hukum Gauss menyatakan bahwa [1]-[3]:

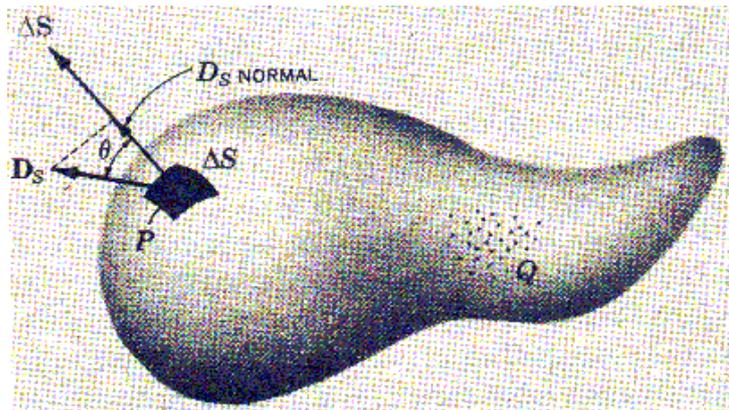
Fluks elektrik yang menembus setiap permukaan tertutup sama dengan muatan total yang dilingkungi oleh permukaan tersebut.

Tinjau suatu distribusi muatan yang digambarkan sebagai awan muatan titik dalam gambar 3.2, dilingkungi oleh permukaan tertutup yang bentuknya sebarang. Permukaan tertutup tersebut dapat merupakan permukaan suatu bahan, tetapi umumnya permukaan tertutup yang ingin kita bayangkan. Pada setiap titik P, tinjau unsur pertambahan permukaan ΔS dan ambil \mathbf{D}_S yang membentuk sudut θ dengan ΔS . Fluks yang menembus ΔS merupakan perkalian antara komponen normal dari \mathbf{D}_S dengan ΔS ,

$$\Delta\Psi = \text{fluks yang menembus } \Delta S = \mathbf{D}_{S, \text{norm}} \Delta S = D_S \cos \theta \Delta S = \mathbf{D}_S \cdot \Delta S$$

Fluks total yang menembus permukaan tertutup didapat dengan menjumlahkan sumbangan diferensial yang menembus tiap-tiap unsur permukaan ΔS .

$$\Psi = \int d\Psi = \oint_{\text{permukaan tertutup}} \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} \quad \dots\dots\dots(3.6)$$



Gambar 3.2. Awan muatan titik yang dilingkungi oleh permukaan tertutup.

Integral resultan merupakan integral permukaan tertutup, dan karena unsur permukaan dS selalu mengandung perkalian diferensial dari dua koordinat misalnya $dx dy$, $\rho dp d\phi$, atau $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$, maka integralnya akan merupakan

integral rangkap dua. Selanjutnya rumusan matematis dari hukum Gauss diberikan sebagai berikut:

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = \text{muatan yang dilingkungi } Q \quad \dots\dots\dots(3.7)$$

Muatan yang dilingkungi dapat terdiri dari beberapa muatan titik, dalam hal ini

$$Q = \Sigma Q_n \quad \dots\dots\dots(3.8)$$

atau muatan garis,

$$Q = \int \rho_L dL \quad \dots\dots\dots(3.9)$$

atau muatan permukaan,

$$Q = \int_S \rho_s dS \quad \dots\dots\dots(3.10)$$

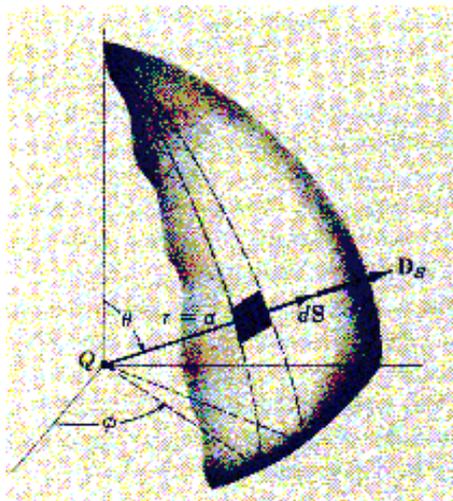
atau distribusi muatan ruang,

$$Q = \int_{vol} \rho_v dv \quad \dots\dots\dots(3.11)$$

Hukum Gauss juga dapat dinyatakan dalam distribusi muatan sebagai berikut:

$$\oint_S \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} \rho_v dv \quad \dots\dots\dots(3.12)$$

Persamaan (3.12) menunjukkan suatu persamaan matematis yang berarti bahwa fluks elektrik total yang menembus setiap permukaan tertutup sama dengan muatan total yang dilingkunginya.



Gambar 3.3. Pemakaian hukum Gauss untuk medan muatan titik pada permukaan bola



Guna memberi gambaran mengenai hukum Gauss, periksa hasil eksperimen Faraday dengan menempatkan muatan titik Q pada titik asal sistem koordinat bola (gambar 3.3) dan dengan memilih permukaan tertutupnya berupa suatu bola dengan jari a . Intensitas medan elektrik muatan titik telah diperoleh yaitu:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad \dots\dots\dots(3.13)$$

dan karena

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \dots\dots\dots(3.14)$$

kita dapatkan

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad \dots\dots\dots(3.15)$$

Pada permukaan bola

$$\mathbf{D}_s = \frac{Q}{4\pi a^2} \mathbf{a}_r \quad \dots\dots\dots(3.16)$$

Unsur diferensial luas pada permukaan bola dalam koordinat bola menurut Bab 1 ialah:

$$dS = r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta = a^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \quad \dots\dots\dots(3.17)$$

atau

$$d\mathbf{S} = a^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \, \mathbf{a}_r \quad \dots\dots\dots(3.18)$$

Integrannya menjadi

$$\mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi a^2} a^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \, \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi} \sin \theta \, d\phi \, d\theta$$

mengarahkan pada integral permukaan tertutup

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin \theta \, d\phi \, d\theta$$

batas integrasinya telah dipilih sehingga integrasi dilakukan pada seluruh permukaan bola sekali saja.

Integrasi tersebut akan menghasilkan,

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin \theta \, 2\pi \, d\theta = \frac{Q}{2} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = Q$$

dan kita mendapatkan hasil yang menunjukkan bahwa Q coulomb fluks elektrik menembus permukaan, seperti yang kita harapkan karena muatan yang dilingkunginya ialah Q coulomb.

3.3 PEMAKAIAN HUKUM GAUSS PADA DISTRIBUSI MUATAN SIMETRIS

Hukum Gauss dapat digunakan untuk menentukan \mathbf{D}_S jika distribusi muatannya diketahui. Rumusan hukum Gauss dimaksud adalah

$$Q = \oint_S \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} \quad \dots\dots\dots(3.19)$$

Pemecahannya akan mudah jika kita dapat memilih permukaan tertutup yang memenuhi syarat sebagai berikut:

1. \mathbf{D}_S selalu normal atau menyinggung permukaan tertutup di setiap titik pada permukaan tersebut, sehingga $\mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S}$ menjadi $D_s \cdot dS$ atau nol.
2. Pada bagian permukaan dengan $\mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S}$ tidak nol, $D_s =$ tetapan (konstanta).

Tinjau kembali muatan titik Q pada titik asal sebuah sistem koordinat bola dan tetapkan sebuah permukaan tertutup yang sesuai dengan kedua persyaratan di atas. Permukaan tersebut jelas merupakan permukaan bola yang pusatnya terletak di titik asal dan berjari r. Arah \mathbf{D}_S di setiap titik pada permukaan, normal pada permukaan tersebut, dan besar \mathbf{D}_S di setiap titik tersebut adalah sama. Jadi,

$$\begin{aligned} Q &= \oint_S \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = \oint_{bola} D_s dS \\ &= D_s \oint_{bola} dS = D_s \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} r^2 \sin \theta d\phi d\theta \\ &= 4\pi r^2 D_s \end{aligned}$$

jadi

$$D_s = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Karena harga r dapat diambil sebarang dan \mathbf{D}_S mempunyai arah radial ke luar, maka

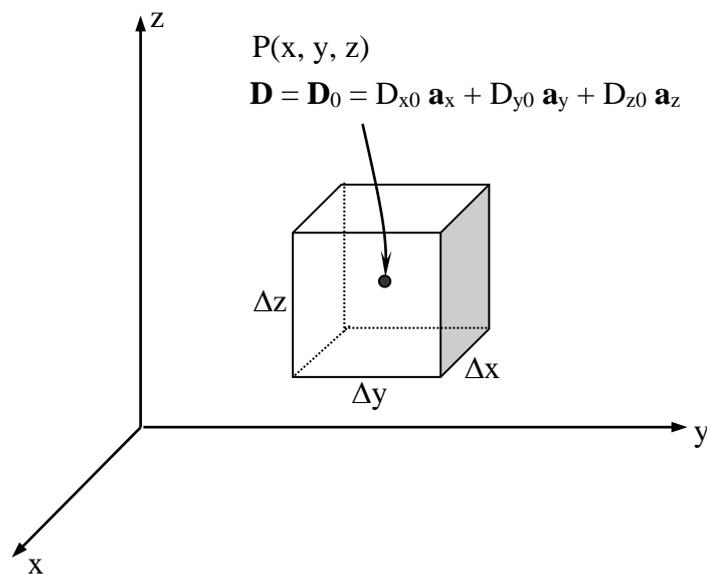
$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad \text{dan} \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$



3.4 PEMAKAIAN HUKUM GAUSS PADA UNSUR VOLUME DIFERENSIAL

Dalam pembahasan ini hukum Gauss kita gunakan untuk persoalan yang tidak mempunyai kesimetrian sama sekali. Marilah kita ambil titik P seperti terlihat pada gambar 3.4 yang kedudukannya dinyatakan dalam sistem koordinat kartesian. Harga \mathbf{D} pada titik P dapat dinyatakan dalam komponen kartesian sebagai berikut:

$$\mathbf{D}_0 = D_{x0} \mathbf{a}_x + D_{y0} \mathbf{a}_y + D_{z0} \mathbf{a}_z,$$



Gambar 3.4. Permukaan Gauss berukuran diferensial dengan titik P dipakai untuk menyelidiki laju perubahan ruang dari \mathbf{D} di sekitar P.

Sebagai permukaan tertutupnya kita pilih sebuah kotak persegi yang pusatnya P dan panjang sisi-sisinya Δx , Δy , dan Δz , menurut hukum Gauss:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad \dots\dots\dots(3.20)$$

Supaya kita dapat menghitung integral tersebut pada permukaan tertutup, maka integralnya harus dipecah menjadi enam integral, yaitu satu integral pada tiap-tiap permukaan,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{depan} + \int_{belakang} + \int_{kiri} + \int_{kanan} + \int_{atas} + \int_{bawah}$$

Mari kita tinjau integral yang pertama secara terperinci. Karena unsur permukaannya sangat kecil, \mathbf{D} dapat dianggap tetap pada seluruh bagian permukaan, dan

$$\begin{aligned}\int_{depan} &= \mathbf{D}_{\text{depan}} \Delta \mathbf{S}_{\text{depan}} \\ &= \mathbf{D}_{\text{depan}} \Delta y \Delta z \mathbf{a}_x \\ &= D_{x, \text{depan}} \Delta y \Delta z\end{aligned}$$

di sini kita harus mengaproksimasikan harga D_x pada permukaan depan tersebut. Permukaan depan berjarak $\Delta x/2$ dari P, jadi

$$\begin{aligned}D_{x, \text{depan}} &= D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \times (\text{laju perubahan } D_x \text{ terhadap } x) \\ &= D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}\end{aligned}$$

dengan D_{x0} ialah harga D_x di P, dan turunan diferensial parsial harus dipakai untuk menyatakan laju perubahan D_x terhadap x karena umumnya D_x berubah juga terhadap y dan z . Rumusan ini dapat diperoleh lebih formal dengan memakai suku tetapan dan suku yang mengandung turunan pertama dalam uraian deret Taylor dari D_x di sekitar P.

Sekarang kita didapatkan,

$$\int_{depan} = \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

Sekarang kita tinjau integral pada permukaan belakang

$$\begin{aligned}\int_{belakang} &= \mathbf{D}_{\text{belakang}} \Delta \mathbf{S}_{\text{belakang}} \\ &= \mathbf{D}_{\text{belakang}} (-\Delta y \Delta z \mathbf{a}_x) \\ &= -D_{x, \text{belakang}} \Delta y \Delta z\end{aligned}$$

dan

$$D_{x, \text{belakang}} = D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

menghasilkan



$$\int_{belakang} = \left(-D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

Jika kita gabungkan kedua integral tersebut maka

$$\int_{depan} + \int_{belakang} = \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Dengan proses yang serupa kita dapatkan

$$\int_{kanan} + \int_{kiri} = \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

dan

$$\int_{atas} + \int_{bawah} = \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

dan hasilnya dapat kita gabungkan sehingga kita dapatkan

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

atau

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v \quad \dots\dots\dots(3.21)$$

3.5 DIVERGENSI

Sekarang kita akan mendapatkan hubungan eksak dari persamaan (3.8) dengan membuat unsur volume Δv menuju nol. Kita tulis persamaannya sebagai berikut:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v} \quad \dots\dots\dots(3.22)$$

atau jika diambil limitnya

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta v} \quad \dots\dots\dots(3.23)$$

di sini aproksimasi telah diganti dengan kesamaan. Jelas bahwa suku yang terakhir ialah kerapatan muatan ruang ρ_v , jadi

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \rho \quad \dots\dots\dots(3.24)$$

Persamaan ini mengandung terlalu banyak informasi untuk dibicarakan sekaligus. Kita akan menuliskannya sebagai dua persamaan yang terpisah:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \quad \dots\dots\dots(3.25)$$

dan

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \quad \dots\dots\dots(3.26)$$

Persamaan (3.25) tidak mengandung kerapatan muatan dan persamaan tersebut dapat menjadi dasar terhadap sebarang besaran vektor. Kita misalkan vektor \mathbf{A} untuk mendapatkan integral permukaan tertutup yang kecil, maka

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \quad \dots\dots\dots(3.27)$$

di sini \mathbf{A} menyatakan kecepatan, gradien temperatur, gaya, atau medan vektor yang lain.

Operasi ini sering kali muncul dalam penelitian fisis, sehingga diberi nama khusus yaitu *divergensi*. Divergensi \mathbf{A} didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{Divergensi } \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \quad \dots\dots(3.28)$$

Ungkapan divergensi untuk masing-masing sistem koordinat diberikan sebagai berikut:

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad \text{(kartesian)} \quad \dots\dots(3.29)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad \text{(tabung)} \quad \dots\dots(3.30)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \quad \text{(bola)} \quad \dots\dots(3.31)$$



Divergensi merupakan operasi yang bekerja pada vektor dan hasilnya ialah skalar.

3.6 PERSAMAAN PERTAMA MAXWELL (ELEKTROSTATIKA)

Rumusan-rumusan yang telah dikembangkan tentang operasi divergensi dalam kaitannya dengan kerapatan fluks elektrik dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \dots\dots\dots(3.32)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \dots\dots\dots(3.33)$$

dan

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v \dots\dots\dots(3.34)$$

Persamaan ini merupakan persamaan pertama dari empat persamaan Maxwell, dan persamaan tersebut menyatakan bahwa fluks elektrik per satuan volume yang meninggalkan volume yang menuju nol sama dengan kerapatan muatan ruang di tempat tersebut. Persamaan ini dapat juga disebut hukum Gauss dalam bentuk titik. Dengan mengingat bahwa divergensi dapat dinyatakan sebagai jumlah dari tiga turunan parsial, maka persamaan pertama Maxwell juga disebut sebagai bentuk persamaan diferensial hukum Gauss dan sebaliknya hukum Gauss dikenal sebagai bentuk integral dari persamaan Maxwell yang pertama.

3.7 OPERATOR VEKTOR ∇ DAN TEOREMA DIVERGENSI

Operator del ∇ didefinisikan sebagai operator vektor, dan rumusannya diberikan sebagai berikut:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \dots\dots\dots(3.35)$$

Tinjaulah ∇ yang menyatakan bahwa

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot (D_x \mathbf{a}_x + D_y \mathbf{a}_y + D_z \mathbf{a}_z)$$

Pertama kita tinjau perkalian titik antar vektor satuan, dengan membuang enam suku nol, kita dapatkan:

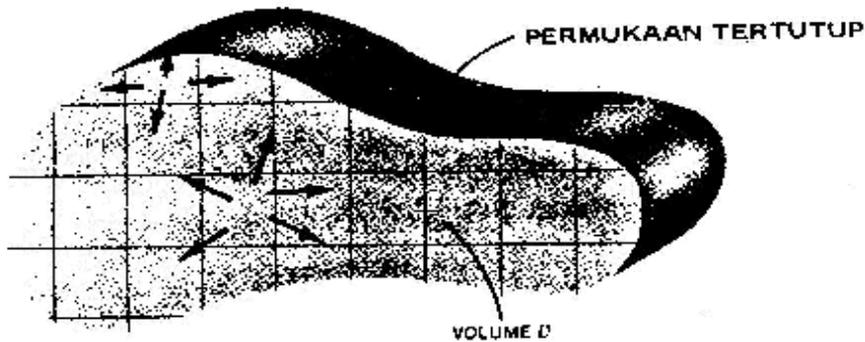
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x}(D_x) + \frac{\partial}{\partial y}(D_y) + \frac{\partial}{\partial z}(D_z)$$

kemudian tanda kurungnya kita buang dan kita lakukan operasi diferensiasi

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Hasilnya dikenal sebagai divergensi \mathbf{D} . Jadi,

$$\text{div } \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad \dots\dots\dots(3.36)$$



Gambar 3.5. Ilustrasi tentang teorema divergensi

Pembahasan tentang divergensi ini membawa kita kepada *teorema divergensi*. Teorema ini dapat dipakai terhadap setiap medan vektor bila turunan parsial yang serasi ada. Jika kita mulai dengan hukum Gauss

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

dan mengambil

$$Q = \int_{vol} \rho_v dv$$

kemudian mengganti ρ_v melalui persamaan

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

kita dapatkan



$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D} dv$$

Suku pertama dan terakhir menyatakan teorema divergensi

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D} dv \quad \dots\dots\dots(3.37)$$

Yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

Integral komponen normal dari setiap medan vektor pada seluruh permukaan tertutup, sama dengan integral divergensi vektor tersebut dalam seluruh volume yang terlindungi oleh permukaan tertutup tersebut.

Contoh 3.1. Tinjau medan $\mathbf{D} = 2xy \mathbf{a}_x + x^2 \mathbf{a}_y$ dan kotak yang dibentuk oleh bidang $x = 0$ dan 1 , $y = 0$ dan 2 , serta $z = 0$ dan 3 . Tentukan muatan total dalam daerah tersebut menggunakan kedua ruas teorema divergensi.

Jawab:

Hitung dahulu integral permukaannya, kita perhatikan bahwa \mathbf{D} sejajar pada permukaan pada $z = 0$ dan $z = 3$, sehingga $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$ pada permukaan tersebut. Untuk keempat permukaan lainnya didapatkan:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^3 \int_0^2 (\mathbf{D})_{x=0} \cdot (-dy dz \mathbf{a}_x) + \int_0^3 \int_0^2 (\mathbf{D})_{x=1} \cdot (dy dz \mathbf{a}_x) \\ &\quad + \int_0^3 \int_0^1 (\mathbf{D})_{y=0} \cdot (-dx dz \mathbf{a}_y) + \int_0^3 \int_0^1 (\mathbf{D})_{y=2} \cdot (dx dz \mathbf{a}_y) \\ &= - \int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=0} dy dz + \int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=1} dy dz \\ &\quad - \int_0^3 \int_0^1 (D_y)_{y=0} dx dz + \int_0^3 \int_0^1 (D_y)_{y=2} dx dz \end{aligned}$$

Tetapi, $(D_x)_{x=0} = 0$, dan $(D_y)_{y=0} = (D_y)_{y=2}$, sehingga tinggal

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^3 \int_0^2 2y dy dz = \int_0^3 4 dz = 12 \text{ C}$$

Karena

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2) = 2y$$

Integral volumenya menjadi

$$\begin{aligned} \int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv &= \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 2y \, dx \, dy \, dz = \int_0^3 \int_0^2 2y \, dy \, dz \\ &= \int_0^3 4 \, dz = 12 \, \text{C} \end{aligned}$$

dan pengecekan tersebut telah kita selesaikan. Dengan mengingat hukum Gauss, kita lihat bahwa telah kita tentukan juga ada muatan total 12 C dalam kotak tersebut.

Latihan:

3.1. Hitunglah divergensi masing-masing medan vektor berikut ini:

(a) $\mathbf{D} = xze^{2y} (\mathbf{z}\mathbf{a}_x + x\mathbf{z}\mathbf{a}_y + x\mathbf{a}_z)$ di titik (1, -1, 2); (b) $\mathbf{D} = 5\rho^2z\phi (\mathbf{a}_\rho + 2\mathbf{a}_\phi - 3\mathbf{a}_z)$ di titik (2, 90°, 1); (c) $\mathbf{D} = 0,2r^3\phi \sin^2\theta (\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\phi)$ di titik (2, 30°, 90°)

3.2. Hitunglah kedua ruas persamaan teorema divergensi untuk medan vektor:

$\mathbf{D} = 2\rho^2 (\cos 5\phi\mathbf{a}_\rho - \sin 5\phi\mathbf{a}_\phi + \mathbf{a}_z)$ dan daerah ruang berbentuk baji yang dibatasi oleh $\rho \leq 5, 0 \leq \phi \leq 0,1\pi, 0 \leq z \leq 10$.

3.3. Diberikan medan vektor: $\mathbf{D} = (0,1/r) \cos \theta \mathbf{a}_\theta$ dalam kerucut terpotong yang didefinisikan oleh $2 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq \pi/4, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Tentukan muatan total yang terletak dalam daerah kerucut tersebut dengan menghitung kedua ruas persamaan teorema divergensi.



DAFTAR PUSTAKA

- [1] George B. Thomas, Maurice D. Weir, “Thomas' Calculus Early Transcendentals”, (11th Edition) (Thomas Series), Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. 75 Arlington Street, Suite 300 Boston, MA, United States, February 2005,
- [2] Edminister, J.A., Murjono (*penerjemah*), 1993, "*Teori dan Soal-soal Elektromagnetika*", Seri Buku Schaum, Erlangga, Jakarta.
- [3] Hayt, W.H., Liang, T.H. (*penerjemah*), 1986, “Elektromagnetika Teknologi”, Edisi ke-4, Jilid 1, Erlangga, Jakarta.
- [4] Hayt, W.H., Liang, T.H. (*penerjemah*), 1986, “Elektromagnetika Teknologi”, Edisi ke-4, Jilid 2, Erlangga, Jakarta.
- [5] Kraus, J.D., 1992, "Electromagnetics", McGraw-Hill, Singapore.
- [6] Schwab, A.J., "Field Theory Concepts", Springer-Verlag, Berlin.
- [7] Yaghoubi, H., 2012, “Practical Applications of Magnetic Levitation Technology” Iran Maglev Technology, September 2012.