Persamaan Poisson dan Laplace

Dr. Ramadoni Syahputra

Jurusan Teknik Elektro FT UMY

TEOREMA KEUNIKAN

Misalkan kita mempunyai dua jawaban persamaan Laplace yaitu V_1 dan V_2, yang keduanya merupakan fungsi dari koordinat yang dipakai.

Jadi,

$$\nabla^2 V_1 = 0 \qquad \text{dan} \qquad \nabla^2 V_2 = 0$$

dari persamaan ini kita dapatkan

$$\nabla^2 (V_1 - V_2) = 0$$

Kedua jawaban tersebut harus memenuhi syarat batas, dan jika herga potensial di perbatasan kita nyatakan dengan V_b, maka harga V_1 di perbatasan V_{1b}, dan harga V_2 di perbatasan V_{2b} keduanya harus identik dengan V_b.

$$V_{1b} = V_{2b} = V_b$$

atau,

$$V_{1b} - V_{2b} = 0$$

Identitas (kesamaan) vektor didefinisikan sebagai

$\nabla \cdot (V\mathbf{D}) \equiv V\,(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V)$

yg berlaku untuk setiap skalar V dan setiap vektor **D**.

Untuk pemakaian sekarang, kita pilih $V_1 - V_2$ sebagai skalarnya dan $\nabla(V_1 - V_2)$ sebagai vektornya.

Jadi,

$$\nabla \cdot [(V_1 - V_2)\, \nabla\, (V_1 - V_2)]$$
$$\equiv (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] + \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2)$$

Persamaan ini kita integrasikan ke seluruh volume yang dilingkungi oleh permukaan perbatasan yang telah kita tentukan:

$$\int_{vol} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\, \nabla\, (V_1 - V_2)]\, dv$$

$$\equiv \int_{vol} (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla (V_1 - V_2)]\, dv + \int_{vol} [\nabla (V_1 - V_2)]^2\, dv \,.$$

Teorema divergensi memperbolehkan kita untuk mengganti integral volume di ruas kiri dengan integral permukaan tertutup pada permukaan yang melingkungi volume tersebut.

Permukaan ini sama dengan permukaan batas yang sudah ditentukan semula.

Pada permukaan tersebut, $V_{1b} = V_{2b}$.

Jadi,

$$\int_{vol} \nabla \cdot [(V_1 - V_2) \nabla (V_1 - V_2)] \, dv$$

$$= \oint_S [(V_{1b} - V_{2b}) \nabla (V_{1b} - V_{2b})] \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Salah satu faktor dari integral pertama pada ruas kanan dari persamaan di atas ialah $\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)$, atau $\nabla^2(V_1 - V_2)$, yang sama dengan nol menurut hipotesis kita, sehingga integralnya menjadi nol.

Jadi, integral yang tertinggal harus nol juga:

$$\int_{vol} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 \, dv = 0$$

Ada dua alasan mengapa suatu integral menjadi nol, yaitu integrannya nol di setiap titik atau integrannya positif di suatu daerah dan negatif di daerah lainnya sehingga kontribusinya saling meniadakan.

Dalam kasus kita alasan yang berlaku adalah yang pertama karena $[\nabla(V_1 - V_2)]^2$ tidak dapat negatif.

Jadi,

$$[\nabla(V_1 - V_2)]^2 = 0$$

dan

$$\nabla(V_1 - V_2) = 0$$

Akhirnya, jika gradien $V_1 - V_2$ di mana-mana nol, maka $V_1 - V_2$ tidak berubah terhadap koordinat apapun dan berarti,

$$V_1 - V_2 = \text{tetapan}$$

Jika kita dapat membuktikan bahwa tetapan tersebut sama dengan nol, kita telah menyelesaikan pembuktian kita.

Tetapannya dapat dicari dengan melihat titik di perbatasan.

Di sini $V_1 - V_2 = V_{1b} - V_{2b} = 0$, dan kita lihat bahwa tetapannya harus nol.

Jadi,

$$V_1 = V_2$$

ini berarti jawabannya harus identik.

Teorema keunikan juga berlaku untuk persamaan Poisson, karena jika

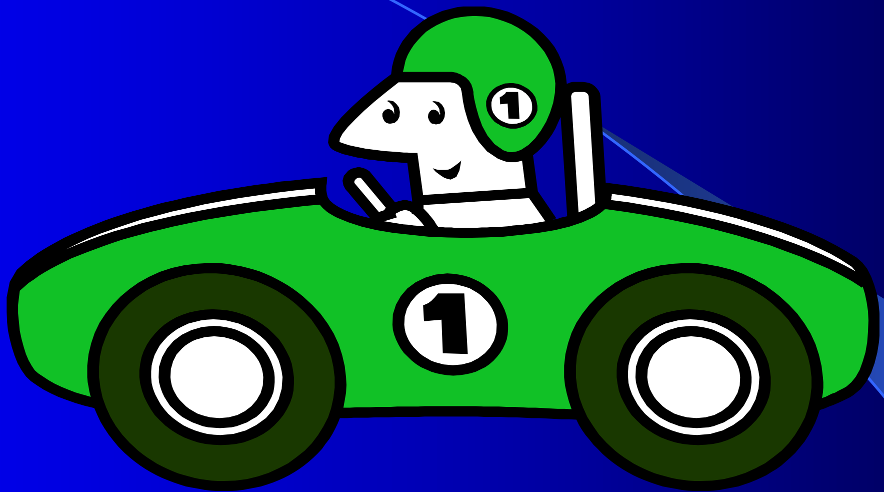
$$\nabla^2 V_1 = -\rho/\varepsilon \text{ dan } \nabla^2 V_2 = -\rho/\varepsilon,$$

maka

$$\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$$

seperti persamaan di atas.

Syarat batasnya tetap menetapkan $V_{1b} - V_{2b} = 0$, sehingga pembuktian selanjutnya sama seperti di atas.



thank’s

thank's