

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1. Bukti-bukti di lapangan atas Parameter Percepatan Tanah Akibat Gempa.

Percepatan tanah akibat gempa telah dipakai dan dipercaya sejak lama sebagai parameter gempa yang sederhana pemakaiannya. Namun demikian bukti-bukti dari beberapa kejadian gempa bumi menunjukkan bahwa parameter tersebut tidak selalu akurat. Mengingat percepatan tanah berasosiasi pada frekuensi tinggi, maka secara teoritis parameter percepatan tanah akibat gempa tidak akan selalu akurat untuk semua jenis/kondisi struktur. Namun demikian hal ini perlu dibuktikan terlebih dahulu, sebagaimana didiskusikan dalam tulisan ini.

Ketidak akuratan percepatan tanah akibat gempa untuk mengukur akibat kerusakan yang terjadi telah disampaikan oleh Housner (1971) pada gempa Parkfield di California pada tahun 1966 dan gempa Elcentro pada tahun 1940. Gempa Parkfield mempunyai percepatan tanah maksimum kurang lebih 0.48 g, namun demikian kerusakan yang terjadi hanya relatif kecil (*little damage*) jika dibandingkan dengan gempa Elcentro yang mempunyai percepatan tanah maksimum 0.32g. Hal inilah yang disebut oleh para ahli sebagai suatu paradoks, karena percepatan tanah akibat gempa yang jauh lebih besar justru tidak mengakibatkan kerusakan bangunan yang berarti. Para peneliti waktu itu menyimpulkan bahwa guncangan gempa yang kuat tetapi hanya terjadi waktu yang relatif singkat (pada gempa Parkfield) tidak akan mengakibatkan kerusakan. Kemungkinan yang kedua adalah adanya redaman yang cukup kuat pada struktur, sehingga respon struktur/kerusakan dapat dieliminasi.

Lebih jauh Housner (1971) juga memberikan bukti ketidak akuratan percepatan tanah akibat gempa yaitu gempa Koyna di India pada tahun 1967. Percepatan tanah maksimum akibat gempa pada Dam Koyna kurang lebih mencapai 0.5 g, namun kerusakan pada dam relatif kecil walaupun dam hanya didisain dengan gaya horisontal 0.05 g (berdasarkan teori metode ekuivalen statik). Bukti lain menunjukkan bahwa kerusakan kecil juga hanya terjadi pada bangunan 3-tingkat yang berjarak 20 km dari patahan (pusat gempa) dengan estimasi percepatan tanah sebesar 0.3 g. Berdasarkan bukti-bukti di lapangan, Tsou et al. (1992), Paulay dan Priestley (1992), Rodriguez (1994)

mengatakan hal yang senada. Ketidak akuratan tanah sebagai parameter gempa dapat dijelaskan dengan membuat suatu kajian/analisis dengan memperhatikan kedekatan antara frekuensi beban dan frekuensi struktur.

## 2.2. Kandungan Frekuensi Gempa.

Untuk membuat suatu kajian seperti yang dimaksud di atas, maka perlu diketahui terlebih dahulu tentang kandungan frekuensi gempa. Sebagaimana diketahui bahwa gempa bumi yang terekam dalam percepatan tanah merupakan gabungan dari beberapa frekuensi. Oleh karena itu dipakai beberapa istilah kandungan frekuensi sebagai suatu cara untuk mendiskripsikan gabungan beberapa frekuensi. Pada kenyataannya kandungan frekuensi pada suatu gempa dapat saja mempunyai rentang yang sempit sehingga frekuensi dominan lebih jelas ataupun kandungan frekuensi yang menyebar dengan rentang yang panjang. Beberapa hal akan berpengaruh terhadap hal-hal tersebut.

Kandungan frekuensi kemudian diketahui menjadi parameter penting selain durasi gempa (Tso, dkk., 1992). Hal tersebut dimungkinkan karena parameter-parameter tersebut dapat dideteksi mulai dari cara yang sederhana. Housner (1971) mengusulkan cara yang sederhana untuk mengetahui kandungan frekuensi gempa yaitu dengan menghitung jumlah garis yang memotong sumbu-waktu untuk setiap detik pada rekaman percepatan tanah akibat gempa. Konsep ini sangat sederhana dan juga dipakai oleh Araya dan Saragoni (1988) dalam bukunya (Uang dan Bertero, 1988) untuk mendiskripsikan *damage potential* suatu gempa.

Konsep lain yang cukup sederhana untuk mendeteksi kandungan frekuensi gempa adalah seperti yang disampaikan oleh Tso dkk. (1992). Konsep yang dimaksud adalah *A/V ratio* yaitu dengan memakai perbandingan antara percepatandan kecepatan tanah maksimum. Sebagaimana dikatakan sebelumnya, percepatan tanah berasosiasi dengan frekuensi tinggi, sedangkan percepatan tanah berasosiasi dengan frekuensi menengah sampai rendah. Bukti dari percepatan gempa menunjukkan bahwa percepatan tanah beratenuasi lebih cepat dibanding dengan kecepatan tanah. Gzaetas (1987) dalam buku (Banerjee, 1987) mengatakan bahwa media tanah umumnya akan berfungsi menyaring frekuensi tinggi pada gelombang gempa, sehingga pada jarak yang jauh percepatan tanah akibat gempa cenderung berbentuk sinusoidal/harmonik. Dengan demikian pada daerah

yang dekat dengan episenter percepatan cenderung mempunyai frekuensi tinggi, bersifat impulsif, percepatan tanahnya relatif tinggi dan durasi gempa relatif singkat. Pada daerah yang jauh dengan episenter, keadaannya akan berkebalikan. Sebagai konsekuensinya nilai *A/V ratio* akan tinggi (frekuensi tinggi) pada daerah yang dekat dengan episenter *A/V ratio* rendah (frekuensi rendah). Dengan demikian *A/V ratio* dapat juga dipakai untuk menentukan kandungan frekuensi gempa secara lebih mudah. Kriteria inilah yang dipakai dalam tulisan ini.

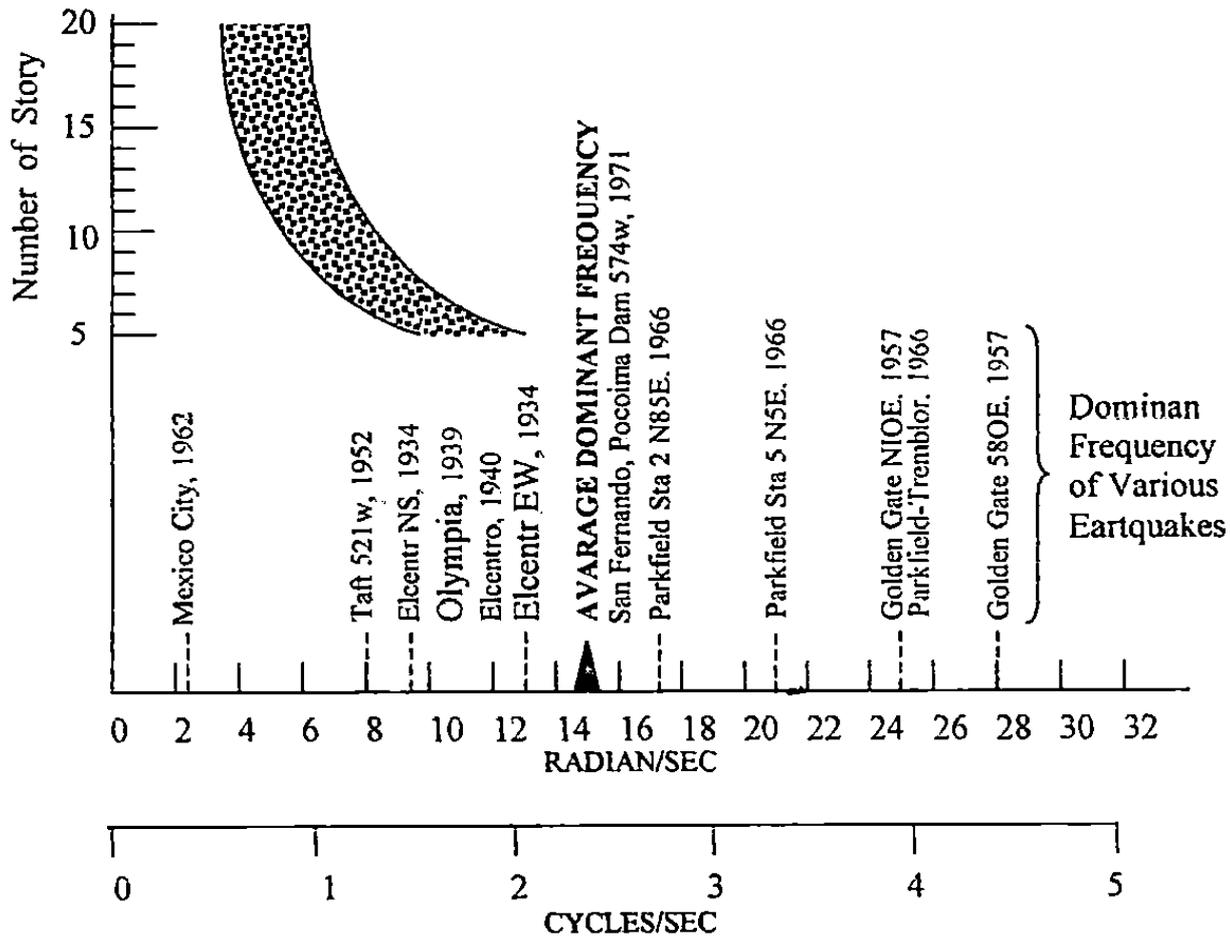
### 2.3. Resonansi.

Sesuatu hal yang menjadi pembahasan hangat sampai sekarang ini adalah gempa seperti apa yang mempunyai potensi merusakkan struktur bangunan (Widodo, 2001). Potensi gempa yang mengakibatkan kerusakan itu kemudian ditentukan oleh parameter-parameter tertentu. Parameter-parameter itu telah diidentifikasi sejak lama. Parameter-parameter tersebut mulai dari percepatan tanah maksimum, bermacam-macam nilai spektrum respon, durasi gempa dan kandungan frekuensi gempa. Parameter yang disebut inilah yang relatif konsisten berdasarkan beberapa kajian yang telah dilakukan.

Sebagaimana diketahui bahwa struktur bangunan akan mengalami kerusakan besar apabila frekuensi dominan beban/getaran tanah akibat gempa berdekatan dengan frekuensi getaran bangunan. Peristiwa tersebut sering disebut dengan peristiwa resonansi, yaitu suatu peristiwa dimana frekuensi getaran beban berimpit/berdekatan dengan frekuensi getaran struktur. Apabila kondisi tersebut terjadi maka struktur bangunan selalu akan runtuh total apabila terjadi gempa bumi. Namun jika frekuensi getaran beban hanya mendekati dengan frekuensi getaran struktur maka respon struktur akan membesar. Pertanyaan yang selalu menghantui adalah pada rentang frekuensi berapa gempa-gempa yang sudah atau yang akan terjadi.

Gambar 2.1. adalah rentang frekuensi getaran tanah akibat gempa relatif terhadap frekuensi getaran struktur menurut Fagel dan Liu dalam Gould dan Abu-Sitta (1982). Pada gambar tersebut rentang frekuensi getaran struktur ditunjukkan oleh bidang terarsir. Dengan memperhatikan gambar tersebut tampak bahwa frekuensi getaran tanah akibat gempa sebagian besar berjauhan dengan frekuensi getaran struktur bangunan pada umumnya. Hal ini adalah suatu keadilan Allah swt. yang harus disyukuri, karena telah

menjadikan gempa yang umumnya mempunyai kandungan frekuensi yang berjauhan dengan frekuensi struktur bangunan pada umumnya.



Gambar 2.1. Rentang Frekuensi Gempa Relatif terhadap Frekuensi Struktur.

#### 2.4. Prinsip Resonansi pada Beban Dinamik Harmonik.

Untuk mengetahui efek frekuensi beban terhadap respon struktur secara sederhana dapat diketahui dengan memperhatikan solusi persamaan differensial gerakan (*differential equation of motion*). Apabila suatu struktur dengan derajat kebebasan tunggal SDOF (*Single Degree of Freedom*) dibebani dengan beban harmonik  $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$ , maka untuk struktur yang dianggap tidak mempunyai redaman, simpangan struktur  $y(t)$  dapat dihitung dengan persamaan 1, dengan  $k$  adalah kekakuan struktur,  $P_0$  adalah amplitudo beban,  $\omega$  adalah frekuensi sudut struktur,  $\Omega$  adalah frekuensi sudut, dan  $r$  adalah rasio frekuensi.

$$P_0 \sin(\omega t) = \dots \Omega \dots \quad (1)$$

Apabila nilai  $r$  pada persamaan 1 sama dengan 1, maka peristiwa resonansi akan terjadi, yaitu simpangan struktur menjadi takterhingga. Sedangkan untuk struktur yang mempunyai redaman, simpangan horisontal struktur dapat dihitung dengan persamaan 2 dan persamaan 3.

$$y(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-r^2)(2\xi)^2} \left\{ e^{-\omega t} [\cos(\omega_d t) + C \sin(\omega_d t)] + (1-r^2) \sin(\Omega t) - 2\xi r \cos(\omega t) \right\} \dots (2)$$

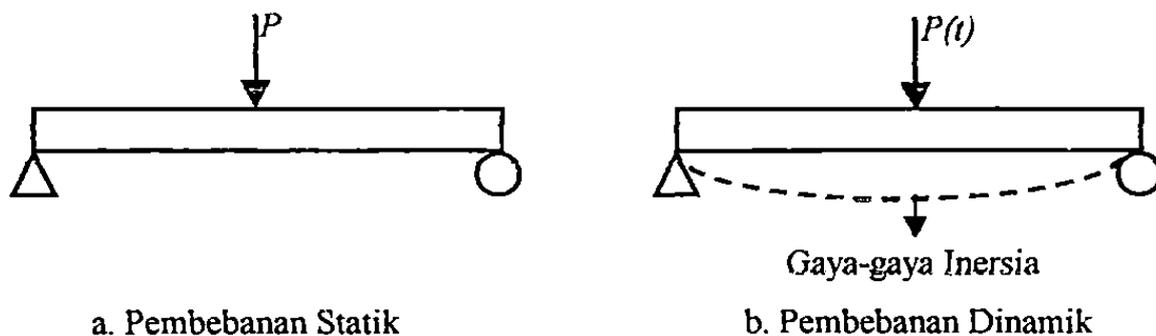
$$C = \frac{r \{ 2\xi^2 - (1-r^2) \}}{(1-\xi^2)^{0.5}} \dots (3)$$

dengan  $\omega_d$  = adalah *damped frequency*.

### 2.5. Tinjauan Fundamental Analisis Dinamik

Istilah dinamika secara sederhana dapat didefinisikan sebagai perubahan waktu, dalam hal ini berarti analisis dinamika adalah yang melibatkan gaya, jarak atau perpindahan dan waktu (Clough & Penzien, 1975).

Pada analisis dinamik ada dua pendekatan yang digunakan untuk mengevaluasi struktur terhadap beban dinamik. Pertama pendekatan *deterministic*, pada analisis ini beban yang bekerja pada analisis struktur adalah *precibid dynamic loading*, yaitu jika variasi waktu pembebanan diketahui secara lengkap walaupun mungkin sangat berosilasi atau sifatnya tidak beraturan. Pendekatan kedua adalah pendekatan *non-deterministic*, yaitu pembebanannya berupa *random dynamic loading* atau pembebanan dinamik acak, pembebanan ini digunakan jika variasi waktu tidak diketahui secara lengkap.



Gambar 2.2. Perbedaan dasar antara beban statik dan dinamik

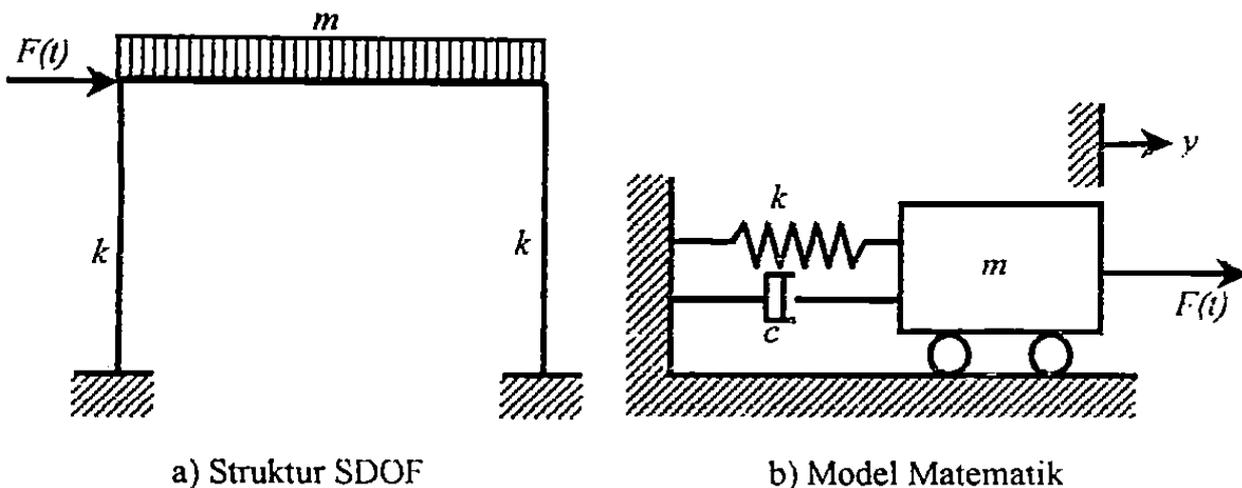
## 2.6. Pembebanan Dinamik.

Pembebanan dinamik secara mendasar berbeda dengan pembebanan statik, pada beban statik tidak akan mengalami perubahan intensitas, sedangkan beban dinamik merupakan suatu fungsi yang mengalami perubahan menurut waktu (Clough & Penzien, 1988). Pada analisis dinamik digunakan pendekatan *deterministic*, yaitu pembebanan yang digunakan adalah beban periodik dan beban non-periodik.

Beban periodik merupakan beban berulang yang memperlihatkan variasi waktu yang sama berturut-turut untuk jumlah siklus yang besar, sedangkan pembebanan non periodik mungkin berbentuk pembebanan impulsif yang berlangsung singkat atau bentuk umum beban-beban yang berlangsung lama, seperti disajikan dalam Gambar 2.2.

## 2.7. Sistem Derajat Kebebasan Tunggal.

Sifat-sifat fisik dari setiap sistem struktur yang elastik secara linier yang dikenakan pada beban dinamik meliputi massa, sifat elastik (kelenturan atau kekakuan), mekanisme kehilangan energi atau peredaman dan sumber luar eksitasi atau pembebanannya (Paz, 1979). Dalam model yang paling sederhana dari suatu sistem derajat kebebasan tunggal (*single degree of freedom, SDOF*) masing-masing sifat tersebut dianggap terpusat pada elemen fisik tunggal. Model tersebut dapat digambarkan sebagaimana seperti disajikan pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Model matematik untuk sistem berderajat kebebasan tunggal (Paz, 1979)

Berdasarkan gambar 2.3 tersebut didapat persamaan differensial gerakan (*differential equation of Motion*) struktur dengan derajat kebebasan tunggal akibat beban dinamik  $F(t)$ , yang disajikan pada Persamaan 4.

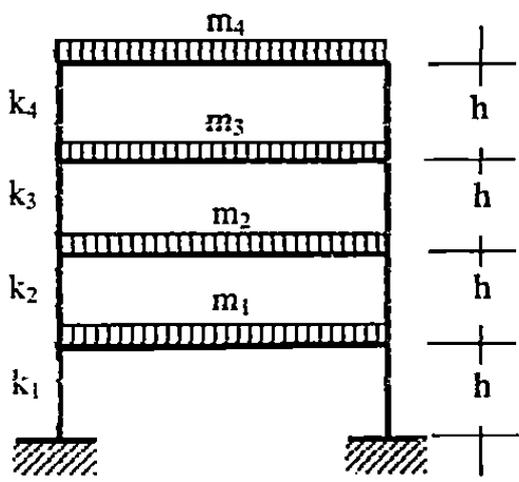
$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F(t) \dots\dots\dots(4)$$

Sedangkan persamaan differensial gerakan suatu massa dengan derajat kebebasan tunggal akibat gerakan tanah (*base motion*), dapat dinyatakan dengan Persamaan 5.

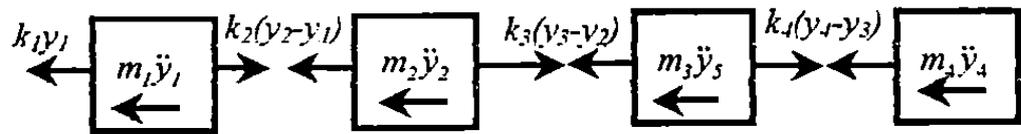
$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{y}_b \dots\dots\dots(5)$$

**2.8. Sistem Derajat Kebebasan Banyak.**

Secara umum struktur bangunan gedung tidaklah selalu dapat dinyatakan didalam suatu sistem yang mempunyai derajat kebebasan tunggal (SDOF). Struktur bangunan justru banyak yang mempunyai derajat kebebasan banyak (*multi degree of freedom, MDOF*). Pada struktur MDOF umumnya massa struktur dapat digumpalkan pada tempat-tempat tertentu (*lumped mass*) yang umumnya pada tiap-tiap lantai-tingkat. Dengan anggapan berperilaku sebagai *Shear Building* maka struktur yang tadinya mempunyai derajat kebebasan tak terhingga akan menjadi struktur dengan derajat kebebasan terbatas.



a. Struktur MDOF 4 tingkat



b. Diagram kesetimbangan

Gambar 2.4. Sistem struktur bangunan MDOF empat tingkat

Struktur dengan derajat kebebasan tunggal berarti hanya ada satu koordinat yang diperlukan untuk menyatakan posisi suatu massa pada saat tertentu. Jumlah derajat kebebasan biasanya dikaitkan dengan jumlah massa, struktur dengan derajat kebebasan banyak berarti dikaitkan dengan jumlah massa yang banyak. Misalnya suatu struktur yang memiliki empat tingkat berarti mempunyai empat massa dan empat derajat kebebasan.

### 2.9. Persamaan Differensial Gerakan MDOF.

Untuk memperoleh persamaan differensial gerakan dipakai prinsip keseimbangan dinamik pada suatu massa yang ditinjau. Untuk memperoleh persamaan tersebut maka diambil contoh model struktur MDOF (*Multi Degrre of Freedom*) seperti Gambar 2.4. Dengan memperhatikan diagram kesetimbangan (*free body diagram*) gambar 2.4b. maka didapat persamaan differensial simultan gerakan massa, sebagaimana ditunjukkan dalam Persamaan 6 s/d Persamaan 9.

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_2 (y_2 - y_1) = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) + k_3 (y_3 - y_2) = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + k_3 (y_3 - y_2) - k_4 (y_4 - y_3) = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$m_4 \ddot{y}_4 + k_4 (y_4 - y_3) = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

Persamaan 6 s/d Persamaan 9 dapat ditulis dalam bentuk matriks, menjadi Persamaan 10.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{y}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

- dimana :
- $m$  = massa tiap lapis tanah (kg dt<sup>2</sup>/cm).
  - $k$  = kekakuan tiap lapis tanah (kg/cm).
  - $y$  = simpangan (cm).
  - $\ddot{y}$  = percepatan tanah (cm/dt<sup>2</sup>).

**2.10. Persamaan *Eigeproblem* dan Mode Shape.**

Persamaan *eigenproblem* didapat dari Persamaan 10, dapat ditulis menjadi Persamaan 11.

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - \omega^2 m_1 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) - \omega^2 m_2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) - \omega^2 m_3 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 - \omega^2 m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots (11)$$

dimana :

$\phi$  = mode shape lapisan tanah.

$\omega$  = frekwensi sudut (rad/dt).

Misalkan :  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$ , dan  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$ , maka Persamaan 11 akan menjadi Persamaan 12 dan dapat ditulis menjadi persamaan 13.

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 m & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k - \omega^2 m & -k \\ 0 & 0 & -k & 2k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots (12)$$

$$\begin{bmatrix} 2 - \frac{\omega^2 m}{k} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 - \frac{\omega^2 m}{k} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 - \frac{\omega^2 m}{k} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 - \frac{\omega^2 m}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots (13)$$

jika  $2 - \frac{\omega^2 m}{k} = \lambda$ , maka Persamaan 13 akan menjadi Persamaan 14.

$$\begin{bmatrix} (2 - \lambda) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & (2 - \lambda) & -1 & 0 \\ 0 & -1 & (2 - \lambda) & -1 \\ 0 & 0 & -1 & (2 - \lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots (14)$$

Persamaan 14 jika disederhanakan menjadi persamaan aljabar biasa, akan diperoleh Persamaan 15 s/d Persamaan 18.

$$(2 - \lambda) \phi_1 - \phi_2 = 0 \dots (15)$$

$$-\phi_1 + (2 - \lambda)\phi_2 - \phi_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$-\phi_2 + (2 - \lambda)\phi_3 - \phi_4 = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$-\phi_3 + (2 - \lambda)\phi_4 = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

Dengan cara substitusi maka nilai mode shape  $\phi_4, \phi_3, \phi_2, \phi_1$  didapat. Setelah nilai mode shape didapat maka dengan mudah nilai percepatan tanah, kecepatan tanah dan simpangan tanah diperoleh.

**2.11. Percepatan, Kecepatan dan Simpangan Bangunan Bertingkat.**

Untuk struktur bertingkat empat seperti pada Gambar 2.4, maka mempunyai empat derajat kebebasan. Persamaan gerakan tersebut umumnya disusun berdasarkan atas goyangan struktur menurut mode pertama. Setelah nilai mode shape didapat maka dengan mudah nilai percepatan tanah, kecepatan tanah dan simpangan tanah diperoleh, berdasarkan Persamaan 19.

$$\{\phi\}_j^T [M] \{\phi\}_j \ddot{Z}_j + \{\phi\}_j^T [C] \{\phi\}_j \dot{Z}_j + \{\phi\}_j^T [K] \{\phi\}_j Z_j = -\{\phi\}_j^T [M] \{I\}_j \ddot{y}_t \quad \dots\dots\dots (19)$$

Jika,

$$M_j^* = \{\phi\}_j^T [M] \{\phi\}_j \ddot{Z}_j$$

$$C_j^* = \{\phi\}_j^T [C] \{\phi\}_j \dot{Z}_j$$

$$K_j^* = \{\phi\}_j^T [K] \{\phi\}_j Z_j$$

$$P_j^* = \{\phi\}_j^T [M] \{I\}_j \ddot{y}_t$$

maka Persamaan 19 dapat menjadi Persamaan 20.

$$M_j^* \ddot{Z}_j + C_j^* \dot{Z}_j + K_j^* Z_j = -P_j^* \ddot{y}_t \quad \dots\dots\dots (20)$$

Jika Persamaan 20 dibagi dengan  $M_j^*$ , dengan

$$\frac{C_j^*}{M_j^*} = 2 \cdot \xi_j \cdot \omega_j, \quad \frac{K_j^*}{M_j^*} = \omega_j^2, \quad \text{dan} \quad \frac{P_j^*}{M_j^*} = \Gamma_j, \quad \dots\dots\dots (21)$$

maka dapat ditulis dalam bentuk differensial menjadi Persamaan 22

$$\ddot{Z}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{Z}_j + \omega_j^2 Z_j = -\Gamma_j \ddot{y}_t \quad \dots\dots\dots (22)$$

dengan :

→ 11. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat dengan Persamaan 23 s/d Persamaan 25

$$Z = g * \Gamma_j \dots\dots\dots(23)$$

$$\dot{Z} = \dot{g} * \Gamma_j \dots\dots\dots(24)$$

$$\ddot{Z} = \ddot{g} * \Gamma_j \dots\dots\dots(25)$$

dengan :

$\Gamma$  = partisipasi mode.

Dengan mensubstitusi Persamaan 23 s/d Persamaan 25 ke dalam Persamaan 22, maka dapat didapat Persamaan 26.

$$\ddot{g}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{g}_j + \omega_j^2g_j = -\ddot{y}_j \dots\dots\dots(26)$$

Untuk menghitung besarnya  $\ddot{g}_j$  dapat digunakan metode *central difference*, sehingga diperoleh Persamaan 27.

$$\dot{g}_j = \frac{g_{j+1} - g_{j-1}}{2\Delta t} \text{ dan } \ddot{g}_j = \frac{g_{j+1} - 2g_j + g_{j-1}}{(\Delta t)^2} \dots\dots\dots(27)$$

Dengan mensubstitusi Persamaan 27 ke dalam Persamaan 26 diperoleh Persamaan 28 yang dapat menghasilkan nilai  $g_{j-1}$ , yang dapat ditulis menjadi Persamaan 29.

$$\frac{g_{j+1} - 2g_j + g_{j-1}}{(\Delta t)^2} + 2\xi_j\omega_j \frac{g_{j+1} - g_{j-1}}{2\Delta t} + \omega_j^2g_j = -\ddot{y}_j \dots\dots\dots(28)$$

$$\left[ \frac{1}{(\Delta t)^2} + \frac{2\xi_j\omega_j}{2\Delta t} \right] g_{j+1} = -\ddot{y}_j \left[ \omega_j^2 - \frac{2}{(\Delta t)^2} \right] g_j - \left[ \frac{1}{(\Delta t)^2} - \frac{2\xi_j\omega_j}{2\Delta t} \right] g_{j-1} \dots\dots\dots(29)$$

Persamaan 29 dapat ditulis menjadi Persamaan 30.

$$g_{j+1} = \frac{-\ddot{y}_j - ag_j - bg_{j-1}}{\hat{k}} \dots\dots\dots(30)$$

dengan,

$$a = \left[ \omega_j^2 - \frac{2}{(\Delta t)^2} \right], \quad b = \left[ \frac{1}{(\Delta t)^2} - \frac{2\xi_j\omega_j}{2\Delta t} \right], \quad \hat{k} = \left[ \frac{1}{(\Delta t)^2} + \frac{2\xi_j\omega_j}{2\Delta t} \right]$$

$\Delta t$  = step integrasi (dt).

$\omega$  = frekwensi sudut (rad/dt).

Dengan demikian diperoleh persamaan simpangan, kecepatan, dan percepatan yang ditulis berturut-turut menjadi Persamaan 31, Persamaan 32, dan Persamaan 33.

$$y = [\phi] * \{Z\} \dots\dots\dots(31)$$

$$\dot{y} = [\phi] * \{\dot{Z}\} \dots\dots\dots(32)$$

$$\ddot{y} = [\phi] * \{\ddot{Z}\} \dots\dots\dots(33)$$

dengan :

$\phi$  = mode shape.

$y$  = simpangan tanah.

$\dot{y}$  = kecepatan tanah

$\ddot{y}$  = percepatan tanah.

### 2.12. Integrasi Numerik dengan Metode Central Difference.

Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematik dengan cara operasi hitungan (aritmatik). Dalam metode numerik ini dilakukan operasi hitungan dalam jumlah yang sangat banyak dan berulang-ulang. Oleh karena itu diperlukan bantuan komputer untuk melaksanakan operasi tersebut.

Pada kondisi beban non-periodik yang sudah kompleks misalnya beban gempa maka respon struktur tidak mungkin lagi dihitung secara analitik, apalagi pada struktur tersebut memiliki derajat kebebasan banyak.

Persyaratan yang harus dipenuhi dalam proses integrasi numerik adalah harus stabil, sehingga kesalahan yang mungkin timbul diawal integrasi tidak *teramplifikasi* (menjadi besar atau bahkan sangat besar) pada akhir integrasi numerik. Salah satu metode yang tidak menimbulkan kesalahan amplifikasi (*unconditional stable*) yaitu metode  $\beta$ -Newmark. Sedangkan metode yang dapat menimbulkan kesalahan amplifikasi (*conditional stable*) pada akhir integrasi numerik adalah Metode Linier Acceleration, Cetral Difference, Wilson- $\theta$ . Namum metode yang *conditional stable* tersebut akan dapat menjadi *unconditional stable* apabila interval waktu  $\Delta t$  yang dipakai tidak lebih dari 0,1 dari periode getas struktur (Humar, 1990 dalam Widada, 2001).

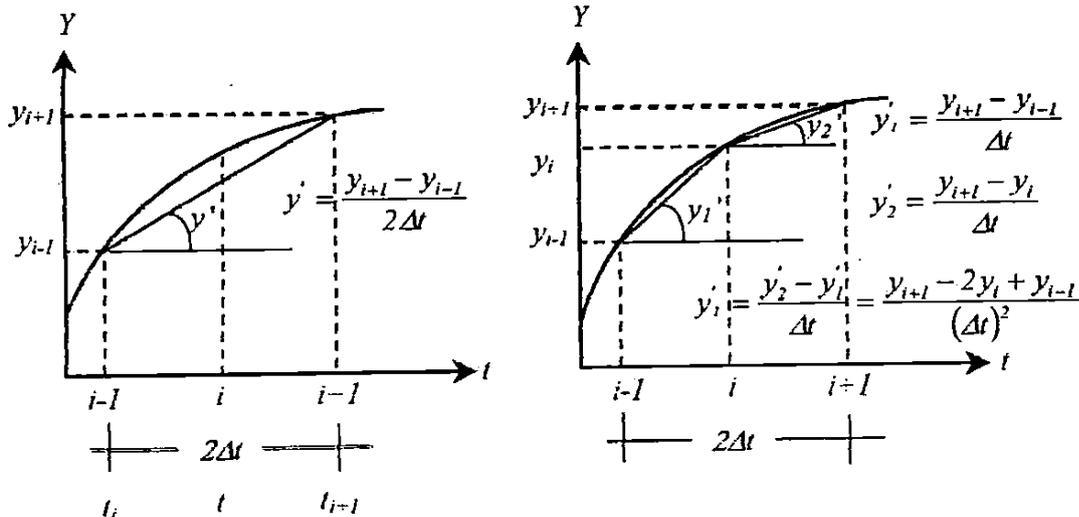
Dengan mempertimbangkan adanya kemudahan dalam proses analisisnya maka di dalam penelitian ini metode yang dipergunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial gerakan adalah metode *Central Difference* yang berdasar pada pendekatan nilai *derivatif* atas fungsi waktu, baik untuk parameter kecepatan maupun percepatan sebagaimana tampak pada Gambar 2.5. Kedua parameter tersebut kemudian dinyatakan dalam fungsi simpangan. Apabila diambil interval waktu  $\Delta t$  secara konstan selama waktu pembebanan, maka menurut prinsip *central difference*, kecepatan dan percepatan dapat dinyatakan dalam Persamaan 34 dan Persamaan 35.

$$\dot{y}_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta t} \dots \dots \dots (34)$$

$$\ddot{y}_i = \frac{y_{i+1} - 2\Delta t + y_{i-1}}{(\Delta t)^2} \dots \dots \dots (35)$$

Jika Persamaan 34 dan Persamaan 35 disubstitusi ke dalam Persamaan 5 maka akan diperoleh Persamaan diferensial 36.

$$m \left( \frac{y_{i+1} - 2\Delta t + y_{i-1}}{(\Delta t)^2} \right) + c \left( \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta t} \right) + ky_i = -m\ddot{y}_{b,i} \dots \dots \dots (36)$$



Gambar 2.5. Derivatif pertama dengan metode *central difference*.

Persamaan 36 mengandung nilai-nilai  $y_{i-1}$ ,  $y_i$  dan  $y_{i+1}$  dan yang akan dihitung adalah nilai  $y_{i+1}$ . Agar nilai  $y_{i+1}$  dapat dihitung, maka nilai-nilai  $y_i$  dan  $y_{i-1}$  harus sudah diketahui. Untuk itu Persamaan 36 dapat disederhanakan menjadi Persamaan 37.

$$\left[ \frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right] y_{i+1} = -m\ddot{y}_{b,i} - \left[ k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \right] y_i - \left[ \frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right] y_{i-1} \quad \dots\dots (37)$$

Apabila persamaan 37 diambil suatu notasi

$$\hat{k} = \left[ \frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right], a = \left[ k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \right], \text{ dan } b = \left[ \frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right]$$

maka akan didapat Persamaan 38, serta dapat ditulis menjadi Persamaan 39.

$$\hat{k}y_{i+1} = -m\ddot{y}_{b,i} - ay_i - by_{i-1} \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$y_{i+1} = \frac{-m\ddot{y}_{b,i} - ay_i - by_{i-1}}{\hat{k}} \quad \dots\dots\dots (39)$$

Persamaan 39 memperlihatkan bahwa simpangan pada point  $i+1$  dapat dihitung apabila simpangan pada point  $i$ ,  $y_i$  dan point  $i-1$ ,  $y_{i-1}$  sudah diketahui. Apabila proses integrasi numerik dimulai dari  $i = 0$ , maka simpangan prasyarat yang harus sudah ada adalah  $y_0$  dan  $y_{-1}$ . Umumnya terdapat suatu kondisi awal  $y_0$  dan  $\dot{y}_0$  yaitu simpangan dan kecepatan saat  $t = 0$ , atau dalam perkataan lain  $y_0$  dan  $\dot{y}_0$  sudah diketahui. Dengan demikian tinggal mencari besarnya  $y_{-1}$ . Untuk itu pembahasan kembali pada Persamaan 34 dan Persamaan 35 dengan indeks  $i = 0$  menjadi Persamaan 40 dan Persamaan 41.

$$\dot{y}_i = \frac{y_i - y_{-1}}{2\Delta t} \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$\ddot{y}_i = \frac{y_i - 2y_0 + y_{-1}}{(\Delta t)^2} \quad \dots\dots\dots (41)$$

Nilai  $y_{-1}$  yang diperoleh dari Persamaan 40 yang disubstitusi ke Persamaan 41, sehingga diperoleh Persamaan 42 dan Persamaan 43.

$$\ddot{y}_0 = \frac{2\Delta t\dot{y}_0 + y_{-1} - 2y_0 + y_{-1}}{(\Delta t)^2} \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$y_{-1} = y_0 - \Delta t\dot{y}_0 + (\Delta t)^2\ddot{y}_0 \quad \dots\dots\dots (43)$$

Untuk mencari besarnya  $y_{.1}$  menurut Persamaan 42 dan Persamaan 43, maka tinggal besarnya  $\ddot{y}_0$  yang belum diketahui. Untuk itu dengan mengambil persamaan diferensial gerakan saat  $t = 0$ , yang ditulis dalam Persamaan 44 didapat Persamaan 45.

$$m\ddot{y}_0 + c\dot{y}_0 + ky_0 = -m\ddot{y}_{b,0} \dots\dots\dots (44)$$

$$\dots\dots\dots -\ddot{y}_{b,0} - c\dot{v}_0 - kv_0$$