

# BAB III. DASAR TEORI

## A. Kemampatan Fluida

Kemampatan fluida didefinisikan sebagai perubahan volume karena adanya perubahan tekanan, yang ditunjukkan oleh perbandingan antara perubahan tekanan dan perubahan volume terhadap volume awal (Schlichting, 1979). Perbandingan antara penambahan tekanan dan perubahan volume relatif tersebut dinyatakan sebagai modulus elastisitas (*modulus of elasticity*). Modulus elastisitas dinyatakan sebagai Persamaan (3.1) :

$$E = -\frac{dp}{\frac{dV}{V}} \quad (3.1)$$

dengan  $E$  adalah modulus elastisitas,  $p$  adalah tekanan dan  $V$  adalah volume.

Rapat massa suatu benda dinyatakan dengan Persamaan (3.2) :

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (3.2)$$

Apabila Persamaan (3.2) dideferensialkan maka akan terbentuk Persamaan (3.3) di bawah ini.

$$d\rho = -\frac{M}{V^2}dV = -\rho\frac{dV}{V} \quad (3.3)$$

dengan  $\rho$  adalah rapat massa,  $M$  adalah massa dan  $V$  volume.

Sehingga dengan melakukan substitusi dari Persamaan (3.3) ke Persamaan (3.1) akan diperoleh Persamaan (3.4) sebagai berikut :

$$E = \frac{dp}{\frac{d\rho}{\rho}} \quad (3.4)$$

Untuk aliran yang tidak mampat (*incompressible*) dianggap tidak ada perubahan rapat massa, sehingga dapat dimasukkan dengan Persamaan (3.5) dan (3.6) :

## B. Persamaan Konservasi Massa

Massa fluida di dalam suatu volume disajikan sebagai :

$$m_v = \int_V \rho dV \quad (3.6)$$

dengan  $m_v$  adalah massa fluida,  $\rho$  adalah rapat massa fluida dan  $V$  adalah volume fluida. Konservasi massa menyatakan bahwa massa suatu system adalah konstan, tidak tergantung pada waktu.

$$\frac{dm_v}{dt} = 0 \quad (3.7)$$

Ditinjau suatu volume kontrol berbentuk balok pada system koordinat kartesian dengan panjang sisi-sisinya adalah  $dx$ ,  $dy$  dan  $dz$ , seperti pada Gambar 3.1.

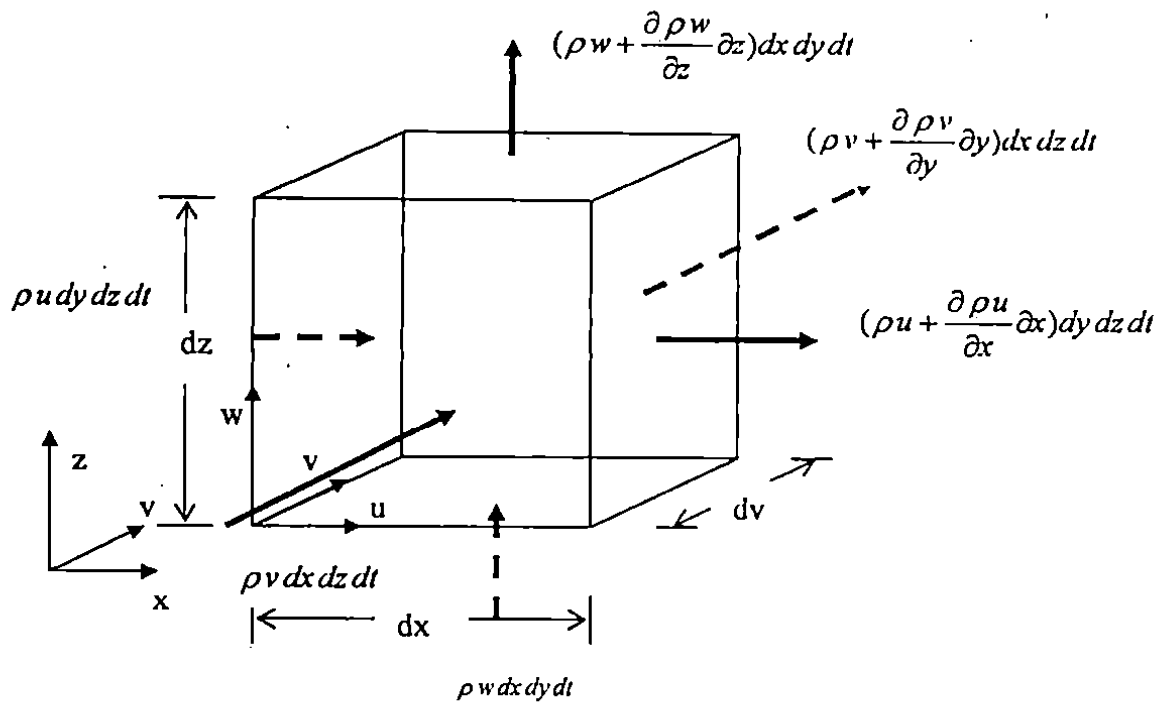
Deret Taylor digunakan untuk evaluasi terhadap massa yang keluar melewati keenam sisi dari volume kontrol tersebut. Jika suatu fungsi  $f(x)$  diketahui di suatu titik  $x_i$  dan semua diferensial dari  $f$  terhadap  $x$  diketahui pada titik tersebut, maka dengan deret Taylor dapat dinyatakan nilai  $f$  pada titik  $x_{i+1}$  yang terletak pada jarak  $\Delta x$  dari titik  $x_i$ .

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{df}{dx} \frac{\Delta x}{1!} + \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots + \frac{d^n f}{dx^n} \frac{\Delta x^n}{n!} \quad (3.8)$$

Massa fluida pada saat  $t$  adalah

$$m_{(t)} = \rho dx dy dz \quad (3.9)$$

dengan  $m_{(t)}$  adalah massa fluida pada waktu  $t$ ,  $dx$  adalah panjang sisi volume kontrol arah sumbu  $X$ ,  $dy$  adalah panjang sisi volume kontrol arah sumbu  $Y$  dan  $dz$  adalah panjang sisi



Gambar 3.1. Volume kontrol dalam system koordinat kartesian

Setelah interval waktu  $dt$ , massa fluida menjadi :

$$m_{(t+dt)} = \left(\rho + \frac{d\rho}{dt} dt\right) dx dy dz \quad (3.10)$$

dengan  $m_{(t+dt)}$  adalah massa fluida saat  $t + dt$ ,  $dt$  adalah interval waktu.

Perubahan massa pada selang waktu  $dt$  pada volume kontrol :

$$m_{(t+dt)} - m_{(t)} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz \quad (3.11)$$

Ditinjau massa fluida yang masuk dan yang ke luar melewati keenam sisi volume kontrol. Massa fluida yang masuk ke sisi kiri volume kontrol adalah

$$m_1 = \rho u dy dz dt \quad (3.12)$$

Sedangkan massa fluida setelah interval waktu  $dt$  yang melewati sisi kiri dan kanan volume

$$m_2 = \left( \rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dy dz dt \quad (3.13)$$

Perubahan massa fluida setelah interval waktu  $dt$  yang melewati sisi kiri dan sisi kanan volume kontrol adalah

$$m_1 - m_2 = -\frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz dt \quad (3.14)$$

Analogi yang sama digunakan untuk massa fluida yang masuk ke sisi bawah atau sisi depan volume kontrol dan massa yang keluar dari sisi atas atau sisi belakang volume kontrol. Jumlah fluida yang dikurangi dengan massa yang keluar dari volume kontrol adalah

$$m_{in} - m_{out} = -\left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dx dy dz dt \quad (3.15)$$

dengan  $u$ ,  $v$ , dan  $w$  masing-masing adalah kecepatan fluida pada arah sumbu  $x$ ,  $y$  dan  $z$ .

Jumlah massa tersebut sama dengan perubahan massa pada selang waktu  $dt$  seperti pada Persamaan (3.11), sehingga terbentuk persamaan konservasi massa (persamaan kontinuitas) untuk aliran mampat (*compressible flow*) sebagai berikut :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (3.16)$$

Persamaan kontinuitas untuk aliran tidak mampat (*incompressible flow*) diperoleh dengan melakukan substitusi Persamaan (3.5) pada Persamaan (3.16). Persamaan kontinuitas untuk aliran tidak mampat dirumuskan sebagai berikut :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ atau } \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.17)$$

dengan  $i = 1, 2, 3$ . Persamaan (3.17) dapat dituliskan dalam bentuk lain yaitu :

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.18)$$

dengan  $\nabla$  adalah divergensi. Jadi divergensi vektor kecepatan  $u(x,y,z,t)$  untuk aliran tidak mampat harus memenuhi nilai sama dengan nol.

### C. Persamaan Konservasi Momentum

Persamaan gerak fluida diperoleh dengan menerapkan Hukum Newton kedua. Hukum Newton kedua menyatakan bahwa resultan dari gaya-gaya yang bekerja pada suatu system sama dengan laju perubahan momentum linier dari sistem tersebut. Secara matematis Hukum Newton kedua dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (3.19)$$

dengan  $F$  adalah gaya yang bekerja pada system,  $p$  adalah momentum, dan  $t$  adalah waktu.

Persamaan (3.19) dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} P &= \int \dot{V} dm \\ d\vec{F} &= dm \frac{d\vec{V}}{dt} \\ d\vec{F} &= dm \frac{D\vec{V}}{Dt} \\ d\vec{F} &= dm \left[ u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Gaya yang bekerja pada sebuah partikel fluida dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu :

- a. Gaya medan (*body forces*)
- b. Gaya permukaan (*surface forces*)

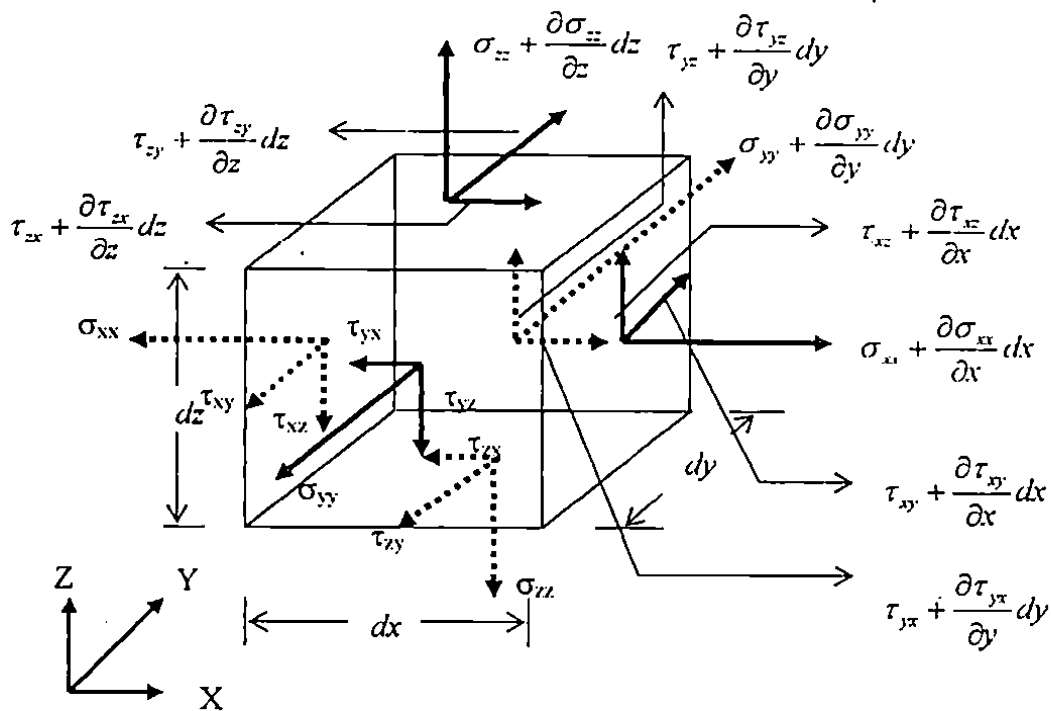
Gaya permukaan (*surface forces*) yang bekerja pada partikel fluida dapat dibagi menjadi dua macam, yaitu :

$$\begin{aligned}
 dl'_x &= \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy - \\
 &\quad \left(\tau_{xz} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz \quad (3.21) \\
 dl'_x &= \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) dx dy dz
 \end{aligned}$$

Gaya yang bekerja pada arah sumbu koordinat x, merupakan gabungan antara gaya medan dan gaya permukaan. Gaya pada arah sumbu koordinat x dapat diformulasikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 dl'_x &= dl'_{ix} + dl'_{bx} \\
 dl'_x &= (\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}) dx dy dz \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Untuk memperjelas keterangan di atas dapat dilihat pada Gambar 3.2. sebagai berikut :



Gambar 3.2. Tegangan-tegangan normal dan tangensial yang bekerja pada bidang batas.

Analog dengan gaya yang bekerja pada arah sumbu koordinat x, maka gaya yang

$$dF_y = dF_{y'} + dF_{y''}$$

$$dF_y = (\rho g_y + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}) dx dy dz \quad (3.23)$$

Untuk arah sumbu z :

$$dF_z = dF_{z'} + dF_{z''}$$

$$dF_z = (f_z + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}) dx dy dz \quad (3.24)$$

#### D. Persamaan Differensial Momentum

Persamaan differensial untuk gerak partikel fluida pada arah sumbu koordinat x :

$$dF_x = (f_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}) dx dy dz \quad (3.25)$$

Persamaan gerak partikel fluida pada arah sumbu koordinat x dapat juga dinyatakan dengan

Persamaan (3.26) sebagai berikut :

$$dF_x = dm (\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z})$$

$$= \rho (\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}) dx dy dz \quad (3.26)$$

Sehingga Persamaan (3.25) akan sama dengan Persamaan (3.26), atau dapat dinyatakan dengan hubungan berikut ini :

$$dF_x = dF_x'$$

$$\rho (\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}) dx dy dz = (f_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}) dx dy dz$$

$$f_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho (\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}) \quad (3.27)$$

Analisa dengan persamaan differensial gerak partikel fluida arah sumbu y maka

$$\begin{aligned}
 f_y + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
 f_z + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

### E. Persamaan Konservasi Momentum Navier-Stokes

Persamaan konservasi momentum Navier-Stokes merupakan persamaan momentum yang dikembangkan oleh Navier-Stokes dengan mengambil asumsi-asumsi tertentu. Persamaan Navier-Stokes diturunkan dari Persamaan (3.26), (3.27), (3.28) untuk arah sumbu koordinat  $x$ ,  $y$  dan  $z$  sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \sigma_x' &= \sigma_x + p \\
 \sigma_y' &= \sigma_y + p \\
 \sigma_z' &= \sigma_z + p
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_x' &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \sigma_y' &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \sigma_z' &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

dengan menggunakan hipotesis yang dikemukakan oleh Stoke bahwa :

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad \text{atau} \quad \lambda = -\frac{2}{3}\mu
 \tag{3.31}$$

maka Persamaan (3.30) dapat dirumuskan :



$$\begin{aligned}\sigma'_x &= -\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma'_y &= -\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma'_z &= -\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}$$

(3.32)

selingga :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -p - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y &= -p - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z &= -p - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}$$

(3.33)

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

(3.34)

$$\begin{aligned}
& f_x + \frac{-p - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial x} = \\
& \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
& \rho\frac{Du}{Dt} = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \\
& \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \\
& \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Untuk arah sumbu y :

$$\begin{aligned}
& f_y + \frac{-p - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\partial y} = \\
& \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\
& \rho\frac{Dv}{Dt} = f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \\
& \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] \\
& \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Arah sumbu z :

$$\begin{aligned}
f_z + \frac{-\rho - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}}{\partial z} + \frac{\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial x} + \frac{\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\partial y} = \\
\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
\rho\frac{Dw}{Dt} = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \\
\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] \\
\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Persamaan Navier-Stokes tersusun atas persamaan diferensial parsial. Untuk arah  $x$ ,  $y$ , dan  $z$  pada sistem koordinat kartesian, persamaan konservasi momentum Navier-Stokes untuk aliran tidak permanen dan tidak mampat (*incompressible*) adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\rho} f_i \quad (3.38)$$

## F. Metode Elemen Hingga

### 1. Metode Sisa Berbobot

Fungsi yang diselesaikan dalam suatu metode numerik adalah fungsi pendekatan. Penyelesaian yang dihasilkan juga merupakan hasil pendekatan. Kesalahan (*error*) yang terjadi,  $R$ , dinyatakan dengan persamaan :

$$R = \phi - \hat{\phi} \quad (3.39)$$

dengan  $\phi$  adalah fungsi eksak dan  $\hat{\phi}$  adalah fungsi pendekat.

Untuk meminimalkan kesalahan dalam elemen hingga dikenal metode sisa berbobot (*weighted residual method*). Metode sisa berbobot yang ada adalah *collocation*

method, subdomain method, least-squares method dan Galerkin method. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode Galerkin yang dirumuskan sebagai berikut :

$$\int_{\Omega} W R d\Omega = 0 \quad (3.40)$$

dengan  $W$  adalah fungsi pembobot. Pada metode Galerkin standar fungsi pembobot diambil sama dengan fungsi bentuk (*shape function*).

## 2. Interpolasi

Untuk mendapatkan nilai fungsi pendekatan  $\hat{f}$  di suatu elemen dilakukan interpolasi dari nilai  $\bar{f}$  di titik-titik nodal elemen tersebut. Interpolasi fungsi  $\hat{f}$  tersebut dituliskan dengan persamaan :

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^n \bar{f}_i N_i \quad (3.41)$$

Interpolasi untuk turunan dari fungsi  $\hat{f}$  untuk arah  $x, y, z$  dalam koordinat kartesian sebagai berikut :

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \bar{f}_i \frac{\partial N_i}{\partial x} ; \quad \frac{\partial \hat{f}}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \bar{f}_i \frac{\partial N_i}{\partial y} ; \quad \frac{\partial \hat{f}}{\partial z} = \sum_{i=1}^n \bar{f}_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^n \bar{f}_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} ; \quad \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^n \bar{f}_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} ; \quad \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial z^2} = \sum_{i=1}^n \bar{f}_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} \quad (3.43)$$

Sedangkan interpolasi untuk turunan  $\hat{f}$  :

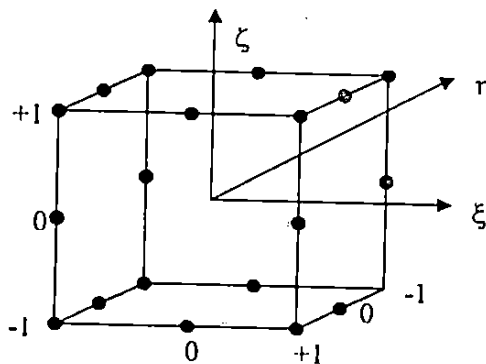
Teorema Green digunakan untuk menyederhanakan formulasi diskret turunan kedua, sehingga formulasi yang terbentuk hanya turunan pertama dari fungsi interpolasi. Teorema Green dinyatakan dengan persamaan berikut ini :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \beta d\Omega + \int_{\Gamma} \alpha \beta n_x d\Gamma \\
 \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \beta d\Omega + \int_{\Gamma} \alpha \beta n_y d\Gamma \\
 \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial z} d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial z} \beta d\Omega + \int_{\Gamma} \alpha \beta n_z d\Gamma
 \end{aligned}
 \tag{3.45}$$

dengan  $\alpha$  dan  $\beta$  adalah suatu fungsi.

Elemen yang digunakan dalam penelitian ini adalah elemen balok kuadratik dengan 20 titik nodal. Variabel kecepatan dihitung pada semua titik nodal dalam elemen kuadratik, sedangkan variabel tekanan hanya dihitung pada titik nodal sudut. Fungsi bentuk yang digunakan untuk interpolasi kecepatan lebih tinggi satu orde jika dibandingkan fungsi bentuk yang digunakan untuk interpolasi tekanan

Fungsi bentuk dalam metode elemen hingga mempunyai nilai satu pada titik nodal yang ditinjau dan bernilai nol pada titik yang lain dalam sebuah elemen. Untuk menyederhanakan persamaan fungsi bentuk maka dipakai elemen isoparametrik, seperti pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3. Elemen isoparametrik balok kuadratik

Fungsi bentuk untuk tiap-tiap nodal dalam elemen balok kuadratik dapat dijelaskan sebagai berikut.

Titik nodal pada sudut elemen (*corner nodes*) :

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) \quad (3.46)$$

Titik-titik nodal pada tengah ruas elemen (*mid-side nodes*) :

Untuk  $\xi = 0$ ,  $\eta = \pm 1$ , dan  $\zeta = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad (3.47a)$$

Untuk  $\xi = \pm 1$ ,  $\eta = 0$ , dan  $\zeta = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2)(1 + \zeta_0) \quad (3.47b)$$

Untuk  $\xi = \pm 1$ ,  $\eta = \pm 1$ , dan  $\zeta = 0$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 - \zeta^2) \quad (3.47c)$$

dengan :  $\xi_0 = \xi \xi_i$ ,  $\eta_0 = \eta \eta_i$ ,  $\zeta_0 = \zeta \zeta_i$

Derivasi dari fungsi bentuk elemen kuadratik terhadap  $\xi$ ,  $\eta$  dan  $\zeta$  untuk tiap-tiap titik nodal disajikan dengan persamaan-persamaan berikut.

Titik nodal pada sudut elemen (*corner nodes*) :

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{8} \xi_i (1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(2\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 1) \quad (3.48a)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{8} \eta_i (1 + \xi_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + 2\eta_0 + \zeta_0 - 1) \quad (3.48b)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{1}{8} \zeta_i (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 + 2\zeta_0 - 1) \quad (3.48c)$$

Titik-titik nodal pada tengah ruas elemen (*mid-side nodes*) :

Untuk  $\xi = 0$ ,  $\eta = \pm 1$ , dan  $\zeta = \pm 1$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \xi (1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad (3.49a)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \eta_i (1 - \xi^2)(1 + \zeta_0) \quad (3.49b)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{1}{4} \zeta_i (1 - \xi^2)(1 + \eta_0) \quad (3.49c)$$

Untuk  $\xi = \pm 1$ ,  $\eta = 0$ , dan  $\zeta = \pm 1$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \xi_i (1 - \eta^2)(1 + \zeta_0) \quad (3.50a)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = -\frac{1}{2} \eta (1 + \xi_0)(1 + \zeta_0) \quad (3.50b)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{1}{4} \zeta_i (1 + \xi_0)(1 - \eta^2) \quad (3.50c)$$

Untuk  $\xi = \pm 1$ ,  $\eta = \pm 1$ , dan  $\zeta = 0$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \xi_i (1 + \eta_0)(1 - \zeta^2) \quad (3.51a)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \eta_i (1 + \xi_0)(1 - \zeta^2) \quad (3.51b)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2} \zeta (1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \quad (3.51c)$$

Fungsi bentuk untuk titik-titik nodal dalam elemen balok linier adalah sebagai berikut :

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad (3.52)$$

Derivasi dari fungsi bentuk elemen linier terhadap  $\xi$ ,  $\eta$  dan  $\zeta$  untuk tiap-tiap titik nodal

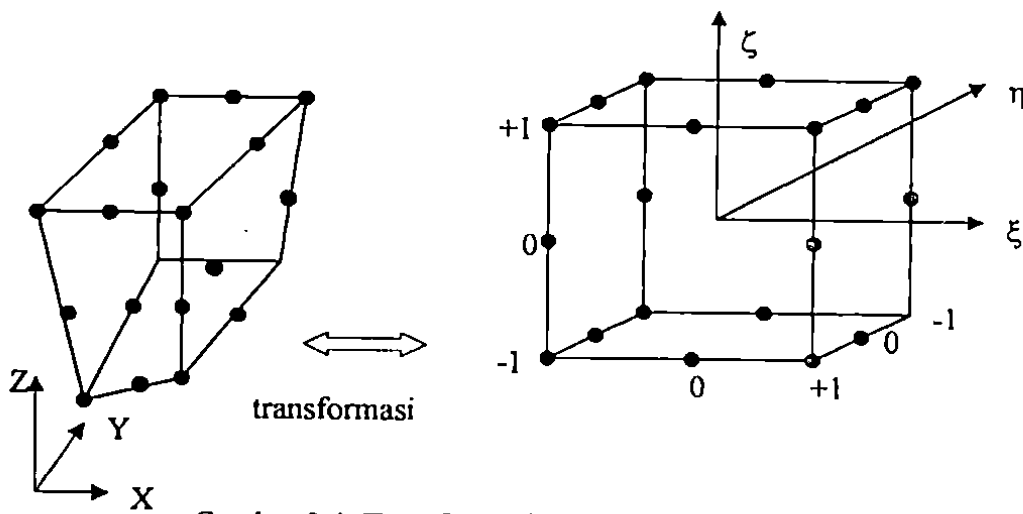
disajikan dengan persamaan-persamaan berikut

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{1}{8} \zeta_i (1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \quad (3.53c)$$

### 3. Transformasi Koordinat

Proses integrasi fungsi diskret di dalam koordinat global lebih rumit dibandingkan integrasi di koordinat lokal. Untuk itu dibutuhkan transformasi fungsi diskret dari koordinat global  $x, y, z$  ke dalam koordinat lokal  $\xi, \eta$  dan  $\zeta$ , seperti yang ditunjukkan Gambar 3.4.

Nilai-nilai  $\xi, \eta$  dan  $\zeta$  pada koordinat lokal adalah  $-1 \leq \xi, \eta$  dan  $\zeta \leq 1$ .



Gambar 3.4. Transformasi dari koordinat global ke koordinat lokal

Derivasi fungsi bentuk  $N$  pada arah sumbu global dapat dihitung dengan aturan rantai dari diferensial parsial dalam sumbu lokal.

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (3.54)$$

dengan indeks  $i$  menunjukkan titik nodal yang ditinjau dalam elemen.

Derivasi fungsi bentuk  $N$  untuk kedua arah yang lain dilakukan dengan aturan sama seperti

Persamaan (3.54), kemudian disajikan dalam bentuk matriks sebagai berikut.



$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

Matriks  $J$  disebut matriks Jacobian. Derivasi fungsi bentuk  $N$  pada sumbu global dapat diketahui dengan melakukan proses inversi terhadap matriks  $J$ .

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

Komponen-komponen matriks  $J$  dapat dicari dengan melakukan proses interpolasi dari titik-titik nodal dalam elemen yang ditinjau, seperti yang disajikan sebagai berikut :

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \quad (3.57a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \quad (3.57b)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \quad (3.57c)$$

dengan  $n$  adalah jumlah titik nodal dalam elemen. Untuk elemen balok kuadratik nilai  $n$  adalah 20.

Dalam proses transformasi dari koordinat global ke koordinat lokal maka volume elemen  $dx dy dz$  diubah ke dalam bentuk volume elemen  $d\xi d\eta d\zeta$

Bila digunakan koordinat lokal yang telah dinormalisasi (nilai  $\xi$ ,  $\eta$  dan  $\zeta$  masing-masing bernilai  $-1$  sampai  $+1$ ), maka proses transformasi dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \approx \iiint_{-1}^{+1} g(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (3.59)$$

dengan  $f$  fungsi dalam koordinat global dan  $g$  fungsi hasil transformasi dari  $f$  pada koordinat lokal.

#### 4. Integrasi Numeris

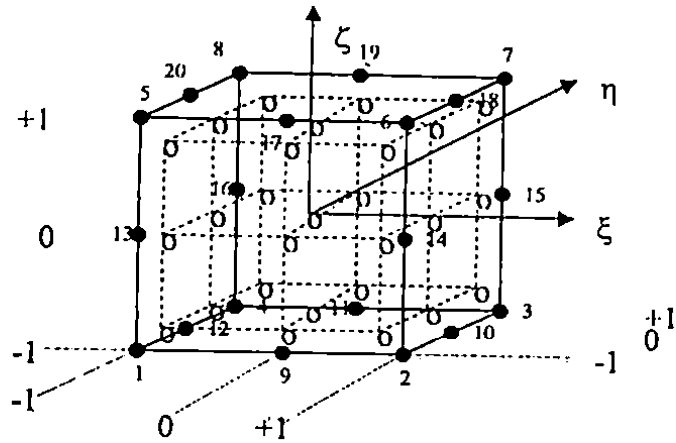
Proses integrasi secara numeris dilakukan pada koordinat lokal elemen. Penelitian ini menggunakan metode Gauss-Legendre *quadrature*. Apabila suatu fungsi yang didekati pada koordinat lokal telah diketahui, maka proses integrasi Gauss-Legendre sebagai berikut :

$$\int_{-1}^{+1} g(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^{NGP} W_i g(\xi_i) \quad (3.60)$$

dengan  $NGP$  adalah jumlah titik Gauss dalam satu elemen. Untuk elemen balok 3 dimensi maka integrasi numerik dilakukan sama seperti Persamaan (3.60) sebagai berikut :

$$\iiint_{-1}^{+1} g(\xi, \eta, \zeta) \approx \sum_{i=1}^{NGP1} \sum_{j=1}^{NGP2} \sum_{k=1}^{NGP3} W_i W_j W_k g(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (3.61)$$

Nilai  $NGP1$ ,  $NGP2$  dan  $NGP3$  masing-masing adalah jumlah titik Gauss pada arah  $\xi$ ,  $\eta$  dan  $\zeta$ . Pada penelitian ini digunakan 3 titik Gauss untuk tiap arah koordinat lokal, sehingga dalam satu elemen terdapat 27 titik Gauss. Penomoran nodal dalam elemen dan titik Gauss yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :



Gambar 3.5. Letak titik Gauss pada koordinat lokal

Nilai posisi  $\xi_i$  dan bobot  $W_i$  untuk jumlah titik Gauss 1 sampai 4 ditunjukkan pada Tabel 3.1 (Carnahan, 1990).

Tabel 3.1. Posisi dan faktor bobot dari metode Gauss-Legendre *Quadrature*

Jumlah Titik Gauss (NGP)	Posisi Titik Gauss ( $\pm \xi_i$ )	Faktor Bobot ( $W_i$ )
1	0	2,0000000000000000
2	0,577350269189626	1,0000000000000000
3	0,774596669241483 0,0000000000000000	0,5555555555555556 0,8888888888888889
4	0,861136311594953 0,339981043584856	0,347854845137454 0,652145154862546